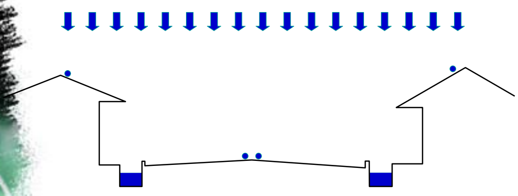
Metoda Numerik

Persamaan Non-Linier

Djoko Luknanto
Staf Pengajar
Jurusan Teknik Sipil FT UGM

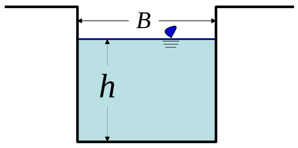
Saluran Drainasi Perumahan



- Untuk merancang saluran drainasi, maka harus diprakirakan jumlah debit (Q) yang masuk kedalam saluran drainasi.
- Kemudian dengan Q tersebut diprakirakan kedalaman air *(h)* di saluran tersebut, sehingga kedalaman saluran yang harus digali dapat ditentukan.

24/10/2004 Djoko Luknanto (luknanto@ugm.ac.id) 2

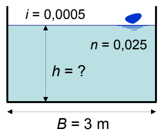
Menghitung Kedalaman Air



- Sebuah saluran mempunyai kemiringan dasar i = 0,0005, dan debit Q = 10,00 m^3/detik. Tampang lintang saluran berbentuk persegi panjang, dengan lebar dasar B = 3,00 m.
  Nilai koefisien kekasaran saluran Manning, n = 0,025, koefisien koreksi tenaga kinetik, α = 1,00 dan percepatan gravitasi, g = 9,80 m/detik^2. Hitung berapa kedalaman air saluran.

24/10/2004 Djoko Luknanto (luknanto@ugm.ac.id) 3

Contoh hitungan



- Sebuah saluran irigasi mengalirkan air dengan debit: Q = 10 m³/d
- Berapa kedalaman air yang terjadi, h = ?

- $Q = A \bullet V$, $A = B \bullet h$, $R = A/P$, $P = B + 2h$

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} I^{1/2}$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{A}{P}\right)^{2/3} I^{1/2}$$

$$10 = (3h) \frac{1}{0{,}025} \left(\frac{3h}{3+2h}\right)^{2/3} 0{,}0005^{1/2}$$

$$10 - \frac{3h}{0{,}025} \left(\frac{3h}{3+2h}\right)^{2/3} 0{,}0005^{1/2} = 0$$

$f(h) = 0 \rightarrow h = ?$

24/10/2004 Djoko Luknanto (luknanto@ugm.ac.id) 4

Mencari Akar Persamaan

- Di dalam matematika aplikasi pencarian akar persamaan $f(x)$=0 sering dijumpai.
- Biasanya jawaban analitis dari persamaan diatas tidak ada, sehingga harus dicari jawaban numeriknya yang biasa dilaksanakan dengan metode iterasi.
- Contoh:
  $f(x) = x - \cos(x) = 0$

24/10/2004 Djoko Luknanto (luknanto@ugm.ac.id) 5

Metode Bagi Paruh (Bisection)

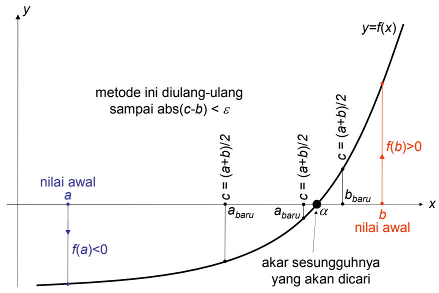
- Jika terdapat suatu $f(x)$ yang menerus $\in [a,b]$ dan

  $f(a)*f(b) < 0$,

  maka menurut Teorema 1.1 paling tidak $f(x)$ mempunyai satu akar $f(x)$ mempunyai satu akar $\in [a,b]$.

24/10/2004 Djoko Luknanto (luknanto@ugm.ac.id) 6

Bisection: visualisasi konsep



- Visualisasi metode bagi paruh

Bisection: algoritma

- Algoritma:

  Bisect (*f*, *a*, *b* , *ε*, *akar*)
  1. Hitung *c* := (*a*+*b*)/2
  2. Jika abs (*b* – *c*) ≤ *ε* , maka *akar*:= *c*, dan 'exit'
  3. Jika {sign *f*(*b*)•sign *f*(*c*)} ⩽ 0, maka *a* := *c* , jika tidak *b* := *c*
  4. Kembali ke langkah Nomor 1.
- Contoh:

  f(*x*)= *x* – cos(*x*) = 0

Metode Newton

- Deret Taylor

$$f(x)=f(x_n)+(x-x_n)f'(x_n)+\frac{1}{2}(x-x_n)^2 f''(\xi)$$

- Jika akar dari *f*(*x*), salah satunya adalah α, maka

$$f(x=\alpha)=0$$

$$f(x)=f(x_n)+(\alpha-x_n)f'(x_n)+\frac{1}{2}(\alpha-x_n)^2 f''(\xi)=0$$

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}+(\alpha-x_n)+\frac{1}{2}(\alpha-x_n)^2\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}=0$$

Metode Newton: formula

- Jadi:

$$\alpha=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\frac{1}{2}(\alpha-x_n)^2\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}$$

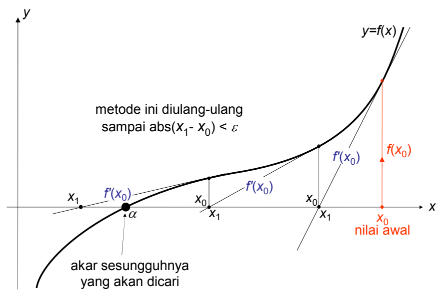
maka α dapat didekati dengan

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n\geq 0$$

dengan 'errornya'

$$\alpha-x_{n+1}=-\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(\alpha-x_n)^2 \qquad n\geq 0$$

Metode Newton: visualisasi



- Visualisasi metode Newton

Metode Newton: algoritma

- Algoritma:

  Newton (*f*, *df*, x_0, *ε*, *itmax*, *ierr* , *akar*)
  1. Keterangan : *df* adalah *f*(*x*), *itmax* adalah iterasi maximum, *ierr* adalah 'error flag'
  2. *noiter*:=1
  3. *penyebut*:=*df*(x_0)
  4. jika *penyebut* = 0 maka *ierr*:=2, dan 'exit'
  5. x_1:= x_0 – *f*(x_0)/*penyebut*
  6. jika $|x_1 - x_0| \leqslant \varepsilon$, maka *ierr*:= 0, *akar*:= x_1, dan 'exit'
  7. jika *noiter* = *itmax* maka *ierr*:= 1, dan 'exit'
  8. *noiter*:= *noiter* +1, x_0:=x_1, dan ulangi langkah 3.
- Contoh:

  f(*x*)= *x* – cos(*x*) = 0

Metode Sekan

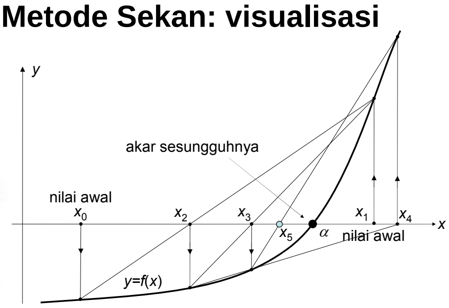
- Metoda Sekan dapat dijabarkan dari metoda Newton yaitu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n \ge 0$$

dengan nilai derivatif pertama didekati sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \qquad n \ge 1$$

Metode Sekan: visualisasi



- Seperti metoda Newton nilai awal x_0 dan x_1 tidak diharuskan mengapit akar sebenarnya α

Perbandingan

Metode Bagi Paruh

n	a	b	$c = (a+b)/2$
	Nilai awal	Nilai awal	=(B4+C4)/2
1	**0,00000**	**1,00000**	0,5000000
2	0,50000	1,00000	0,7500000
3	0,50000	0,75000	0,6250000
4	0,62500	0,75000	0,6875000
5	0,68750	0,75000	0,7187500
6	0,71875	0,75000	0,7343750
7	0,73438	0,75000	0,7421875
8	0,73438	0,74219	0,7382813
9	0,73828	0,74219	0,7402344
10	0,73828	0,74023	0,7392578
11	0,73828	0,73926	0,7387695
12	0,73877	0,73926	0,7390137
13	0,73901	0,73926	0,7391357
14	0,73901	0,73914	0,7390747
15	0,73907	0,73914	0,7391052
16	0,73907	0,73911	0,7390900

Metoda Newton

n	x_n	$f(x_n)$
	Nilai awal	=B6-COS(B6)
1	**1,00000000000**	0,45969769413
2	0,75036386784	0,01892307382
3	0,73911289091	0,00004645590
4	0,73908513339	0,00000000028
5	0,73908513322	0,00000000000

Metoda Sekan

n	x_{n-1}	x_n
	Nilai awal	Nilai awal
1	**1,0000000000**	**2,0000000000**
2	2,0000000000	0,7650346824
3	0,7650346824	0,7422994069
4	0,7422994069	0,7391032702
5	0,7391032702	0,7390851461
6	0,7390851461	0,7390851332
7	0,7390851332	0,7390851332
8	0,7390851332	0,7390851332

Tingkat Kelajuan: definisi

- Suatu deret hasil suatu iterasi $\{x_n \mid n \geqslant 0\}$ dikatakan menuju ke titik α dengan derajat $p \geqslant 1$, jika

$$|\alpha - x_{n+1}| \le c|\alpha - x_n|^p \qquad n \ge 0$$

untuk beberapa nilai $c > 0$.

- Jika $p = 1$, deretnya disebut menuju ke titik α secara linier.

Tingkat Kelajuan

- Metoda Bagi Paruh $p = 1$

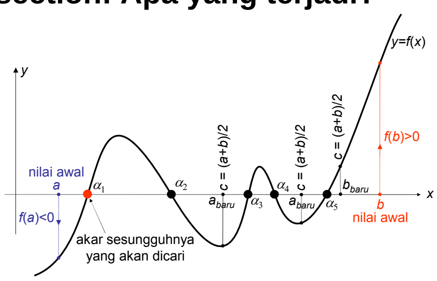
$$|\alpha - c_n| \le (\tfrac{1}{2})^n (b - a)$$

- Metoda Newton $p = 2$

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(\alpha - x_n)^2$$
$$= \text{konstanta} \times (\alpha - x_n)^2$$

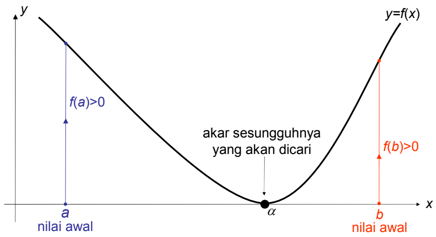
- Metoda Sekan p = ½(1+√5) = 1,618

Bisection: Apa yang terjadi?



Jika $f(x)$ mempunyai banyak akar (α_1,α_2,α_3,α_4,α_5) maka nilai akar dari metoda *Bisection* mungkin bukan akar yang kita maksudkan semula yaitu α_1, namun hasilnya justru akar yang lain yaitu α_5

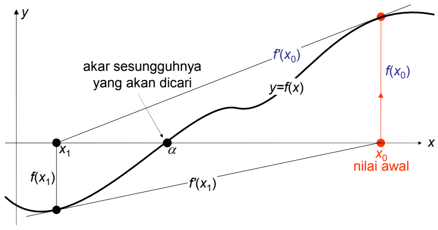
Bisection: Apa yang terjadi?



- Untuk *f*(*x*) semacam diatas maka untuk metode bagi paruh, nilai awal *f*(*a*), *f*(*b*) yang berlawanan tanda tidak pernah diperoleh.

Newton: Apa yang terjadi?

- Apa yang terjadi dengan metode Newton?



- Walaupun mempunyai tingkat kelajuan tertinggi, namun metoda Newton gagal memperoleh hasil dalam kasus ini.

Metoda Adaptive

- Tampak bahwa untuk fungsi yang sama metoda Bisection (walaupun lebih lambat) akan selalu mampu mendapatkan nilai α.
- Oleh karena itu dalam pemrograman komputer kadang kedua metoda (Newton dan Bisection) digabung untuk selalu menghasilkan nilai α (Bisection), namun secepat metoda Newton.