

Bab 3

Dasar Pertama:

Metoda Penyelesaian Pendekatan

I. Tiga Langkah Pokok (hal.54)

1. Bentuk sebuah “penyelesaian pendekatan” $\hat{U}$
2. Optimasikan $\hat{U}$
3. Prakirakan ketelitian $\hat{U}$

1. Pembentukan $\hat{U}$ (hal.54)

$$\hat{U}(x;a) = \emptyset_0(x) + a_1\emptyset_1(x) + a_2\emptyset_2(x) + \dots + a_N\emptyset_N(x)$$

- $\emptyset_0(x), \emptyset_1(x), \dots, \emptyset_N(x)$ disebut *fungsi trial, fungsi basis*
- $a_1, a_2, \dots, a_N$ adalah parameter yang dicari; sering disebut sebagai “derajat bebas” (DOF)
- $\hat{U}(x;a)$ merupakan fungsi dari x dan $a_1, a_2, \dots, a_N$
- $\emptyset_0(x)$ tidak dikalikan dengan parameter a ; fungsinya untuk memenuhi syarat kondisi batas.

2. Kriteria Optimasi Untuk $\hat{U}$

(hal.55)

Ada dua kriteria yang terkenal dalam MEH

- A. **Metoda Residu Berbobot (MWR)**
diaplikasikan pada persamaan dasar yang berbentuk persamaan differensial
- B. **Metoda Variasi Ritz (RVM)**
diaplikasikan pada persamaan dasar yang berbentuk persamaan integral.

A. Metoda Residu Berbobot (MWR)

(hal.55)

- me-*minimum*-kan “selisih” (error) pada *persamaan dasar* [*bukan* pada fungsi $\hat{U}(x)$ yang kita cari]
- ada 4 metoda
 - metoda kolokasi
 - metoda subdomain
 - metoda kuadrat terkecil
 - metoda Galerkin

B. Metoda Variasi Ritz (RVM)

(hal.55)

- me-*minimum*-kan suatu kuantitas fisik misalkan *energi* [*bukan* pada fungsi $\hat{U}(x)$ yang kita cari]
- misalkan dalam mekanika statis, biasanya yang diminimumkan adalah energi potensial.

3. *Prakirakan Ketelitian $\hat{U}$* (hal.56)

- diinginkan suatu prakiraan seberapa dekat ketelitian $\hat{U}$ dengan U
- ketelitian ini disebut dengan “error”/ kesalahan $E(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) - \hat{U}(\mathbf{x})$
- secara praktis kita tidak pernah dapat menghitung $E(\mathbf{x})$, karena didalamnya mengandung penyelesaian “exact” $U(\mathbf{x})$.
- oleh karena itu harus ada cara lain untuk memprakirakan $E(\mathbf{x})$.

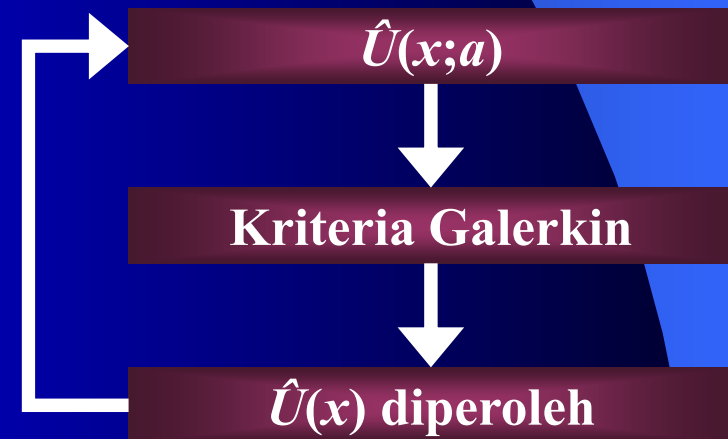
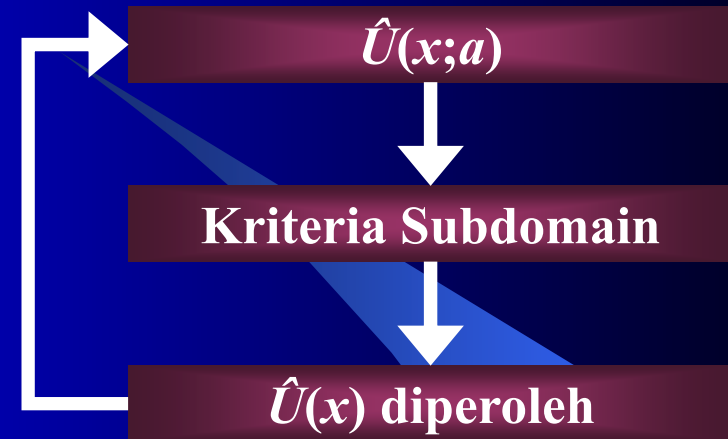
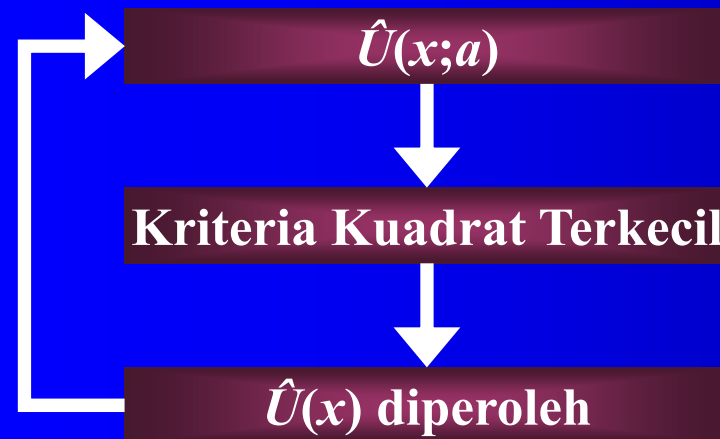
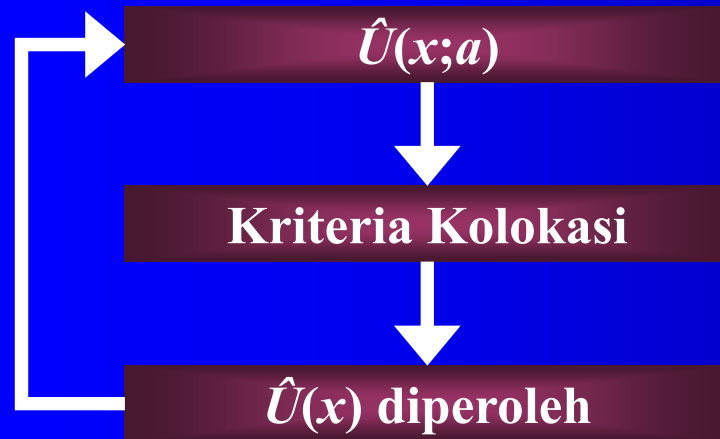
Derajat Bebas (DOF) (hal.56)

- jika kita dapat memprakirakan kesalahan $E(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}) - \hat{U}(\mathbf{x})$... dan ternyata terlalu besar
- apakah ada cara untuk memperkecil?
- ... ya ... salah satu cara ...
- yaitu dengan membuat $\hat{U}(\mathbf{x})$ yang baru yang mempunyai derajat bebas lebih tinggi.

Teknik Memperoleh $\hat{U}(x)$ (hal.56)



$\hat{U}(x)$ dgn Kriteria Berbeda (hal.56)

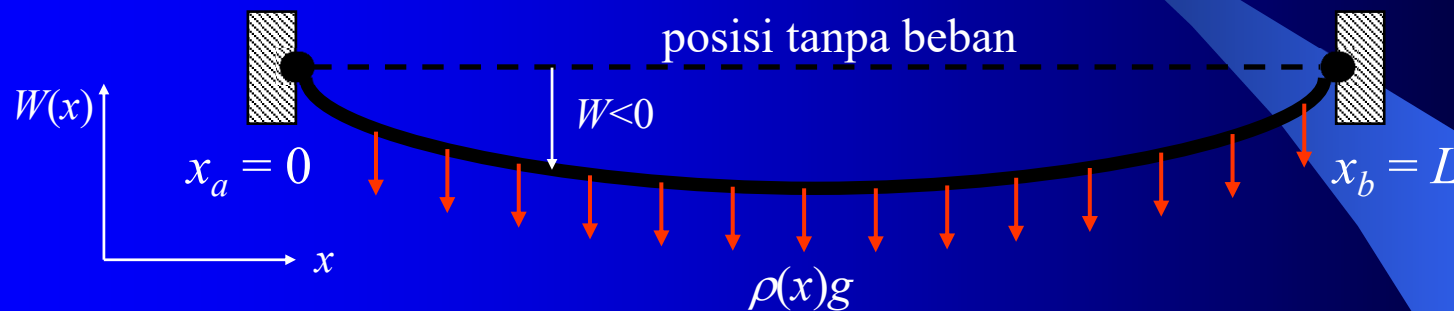


II. Contoh Kasus (hal.41)

Deskripsi:

Sebuah kabel yang tergantung pada dua perletakan dan mendapat beban merata karena berat sendiri.

Gambar:



Persamaan dasar:

$$-\frac{d}{dx} \left(T \frac{dW(x)}{dx} \right) = -\rho(x)g \quad 0 < x < L$$

$$W(0) = 0, \quad W(L) = 0$$

Contoh Kasus (lanjutan) (hal.59)

Persamaan Dasar:

$$-\frac{d}{dx} \left(x \frac{dU}{dx} \right) = \frac{2}{x^2}$$

Domain: $1 < x < 2$

Kondisi Batas:

$$U(1) = 2$$
$$\left(-x \frac{dU}{dx} \right)_{x=2} = \frac{1}{2}$$

Contoh Kasus (lanjutan) (hal.59)

Kondisi Batas:

- dalam bentuk seperti di bawah ini, kondisi batas mempunyai arti khusus di lapangan, misalkan debit sesuai cairan.

$$\tau(x) = -x \frac{dU(x)}{dx}$$

- oleh karena itu kondisi batas ditulis sebagai:

$$\left(-x \frac{dU(x)}{dx} \right)_{x=2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tau(2) = \frac{1}{2}$$

- bukan:

$$\left(\frac{dU(x)}{dx} \right)_{x=2} = -\frac{1}{4}$$

III. Pembentukan $\hat{U}$ (hal.60)

- $\hat{U}(x;a) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots + a_Nx^{N-1}$
- “persamaan pendekatan” di atas harus memenuhi:
 1. Persamaan dasar (baik yang differensial maupun variasional) pada “interior” dari domainnya
 2. Nilai-nilai kondisi batas yang telah ditentukan pada daerah batas.
- untuk memenuhi Butir 2, diperlukan dua metoda yang berbeda; hal ini disebut dengan “applying the boundary conditions.”

Aplikasi Kondisi Batas (hal.60)

1. **Cara Teoritis.** Kondisi Batas (baik semua atau sebagian) diaplikasikan langsung ke $\hat{U}$ pada awal analisis dengan membentuknya ke suatu fungsi yang memenuhi kondisi batas tersebut.
2. **Cara Numeris.** Kondisi Batas diaplikasikan ke $\hat{U}$ yang sudah dioptimalkan pada akhir analisis.

Kedua cara ini menghasilkan $\hat{U}$ yang sama.

Cara Teoritis ... (hal.61)

Dibentuk “solusi coba” dalam bentuk $\hat{U}(x;a)$ dan dipaksa memenuhi kondisi batas untuk setiap nilai a_i .

- $\hat{U}(x;a) = \emptyset_0(x) + a_1\emptyset_1(x) + a_2\emptyset_2(x) + \dots + a_N\emptyset_N(x)$
- harus memenuhi kondisi batas
 $U(1) = 2$

... Cara Teoritis $\hat{U}$... (hal.61)

- $\hat{U}(1;a) = \emptyset_0(1) + a_1\emptyset_1(1) + a_2\emptyset_2(1) + \dots + a_N\emptyset_N(1) = 2$
- Agar untuk setiap a_i ini terpenuhi maka:
 1. $\emptyset_0(1) = 2$
 2. $\emptyset_i(1) = 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, N$

... Cara Teoritis $d\hat{U}/dx$... (hal.62)

- Harus dipenuhi:

$$\left(-x \frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=2} = \left(-x \frac{d\phi_0}{dx}\right)_{x=2} + a_1 \left(-x \frac{d\phi_1}{dx}\right)_{x=2} + a_2 \left(-x \frac{d\phi_2}{dx}\right)_{x=2} + \dots + a_N \left(-x \frac{d\phi_N}{dx}\right)_{x=2} = \frac{1}{2}$$

- Agar untuk setiap a_i ini terpenuhi maka:

$$\begin{aligned} \left(-x \frac{d\phi_0}{dx}\right)_{x=2} &= \frac{1}{2} \\ \left(-x \frac{d\phi_i}{dx}\right)_{x=2} &= 0 \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

... Mengunci... (hal.62)

- Tampak bahwa dapat dibentuk suatu “solusi coba” yang selalu memenuhi kondisi batas untuk setiap a_i .
- Artinya apapun juga cara yang digunakan untuk optimasi a_i , kondisi batas akan selalu terpenuhi.
- Sifat seperti ini disebut “**mengunci**” atau “**constraining**” “solusi coba.”

Langkah 1 ... (hal.62)

- Kita lakukan pada “solusi coba” dgn $N=4$

$$\hat{U}(x;a) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$$

- Kondisi batas:

$$\hat{U}(1;a) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2$$

$$\left(-x \frac{d\hat{U}}{dx} \right)_{x=2} = -a_2x - 2a_3x^2 - 3a_4x^3 = \frac{1}{2}$$

$$-2a_2 - 8a_3 - 24a_4 = 1/2$$

... Langkah 2 ... (hal.63)

1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2$
 2. $a_2 + 4a_3 + 12a_4 = -\frac{1}{4}$
- kedua persamaan ini disebut “persamaan konstrain”
 - Pers. 1 dapat ditulis sebagai:
 $a_1 = 2 - a_2 - a_3 - a_4$
 - Pers. 2 dapat ditulis sebagai:
 $a_2 = -\frac{1}{4} - 4a_3 - 12a_4$

... Langkah 3 ... (hal.63)

- Pers 1. disubstitusikan, sehingga

$$\hat{U}(x;a) = (2 - a_2 - a_3 - a_4) + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$$

$$\hat{U}(x;a) = 2 + a_2(x-1) + a_3(x^2-1) + a_4(x^3-1)$$

- Pers 2. disubstitusikan, sehingga

$$\hat{U}(x;a) = 2 + (-\frac{1}{4} - 4a_3 - 12a_4)(x-1) + a_3(x^2-1) + a_4(x^3-1)$$

$$\hat{U}(x;a) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + a_3(x-1)(x-3) + a_4(x-1)(x^2+x-11)$$

... $\hat{U}(x;a)$ ketemu ... (hal.63)

- $\hat{U}(x;a) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + a_3(x-1)(x-3) + a_4(x-1)(x^2+x-11)$

disederhanakan menjadi:

- $\hat{U}(x;a) = \emptyset_0(x) + a_1\emptyset_1(x) + a_2\emptyset_2(x)$

dengan

$$\emptyset_0(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1)$$

$$\emptyset_1(x) = (x-1)(x-3)$$

$$\emptyset_2(x) = (x-1)(x^2+x-11)$$

- a_3 dan a_4 diubah menjadi a_1 dan a_2

... menghitung $d\hat{U}/dx$... (hal.63)

- Untuk “debit”:

$$\begin{aligned}\hat{\tau}(x; a) &= -x \frac{d\hat{U}(x; a)}{dx} \\ &= \left(-x \frac{d\phi_0}{dx} \right) + a_1 \left(-x \frac{d\phi_1}{dx} \right) + a_2 \left(-x \frac{d\phi_2}{dx} \right)\end{aligned}$$

- dengan

$$\begin{aligned}-x \frac{d\phi_0(x)}{dx} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2) \\ -x \frac{d\phi_1(x)}{dx} &= -2x(x-2) \\ -x \frac{d\phi_2(x)}{dx} &= -3x(x-2)(x+2)\end{aligned}$$

IV. Empat MWR untuk $\hat{U}$ (hal.65)

1. Persamaan Dasar

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{dU(x)}{dx}\right) - \frac{2}{x^2} = 0$$

2. Persamaan Pendekatan

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\hat{U}(x)}{dx}\right) - \frac{2}{x^2} \neq 0$$

Definisi Residual ... (hal.65)

- $R = \text{LHS Pers. Pendekatan} - \text{LHS Pers. dasar}$

$$R = \underbrace{\left[-\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\hat{U}(x)}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} \right]}_{\neq 0} - \underbrace{\left[-\frac{d}{dx} \left(x \frac{dU(x)}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} \right]}_{=0}$$

- diperoleh residual, R adalah:

$$R(x;a) = \left[-\frac{d}{dx} \left(x \frac{d\hat{U}(x)}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} \right] \neq 0$$

- substitusi diperoleh:

$$R(x;a) = -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2}$$

... *konsep pokok MWR* ... (hal.65)

- Residual:

$$R(x;a) = -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - 2/x^2$$

- **Konsep pokok:** mencari nilai a_1 dan a_2 yang menghasilkan nilai $R(x;a)$ paling kecil.
- Secara intuisi jika $R(x;a)$ mengecil, maka $E(x) = U(x) - \hat{U}(x)$ juga mengecil.

1. Metoda Kolokasi (hal.66)

- Untuk setiap parameter a_i yang dibutuhkan, pilih satu titik x_i dalam domain. Pada setiap titik tersebut “paksa” residu $R(x_i; a) = 0$
 $R(x_1; a) = 0, R(x_2; a) = 0, \dots, R(x_N; a) = 0$
- Untuk N nilai a_i , akan diperoleh N sistem persamaan.
- Titik-titik x_i tersebut adalah titik kolokasi.

... Metoda Kolokasi 1... (hal.66)

- Pilih titik-titik x_i misalkan $x_1 = 4/3$, $x_2 = 5/3$
- substitusikan kedalam residual
$$R(x;a) = -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} = 0$$
- diperoleh sistem persamaan
$$\frac{4}{3} a_1 + 04 a_2 = 11/8$$
$$\frac{8}{3} a_1 + 13 a_2 = 97/100$$
- diperoleh nilai:
$$a_1 = 2.0993 \text{ dan } a_2 = -0.3560$$

... Metoda Kolokasi 2... (hal.66)

- dengan nilai:

$$a_1 = 2.0993 \text{ dan } a_2 = -0.3560$$

- maka diperoleh “solusi coba”:

$$\hat{U}_K(x) = 2 - \frac{1}{4} (x-1) + 2.0993 (x-1)(x-3) - 0.3560 (x-1)(x^2 + x - 11)$$

- dan debit/”flux”-nya:

$$\tau_K(x) = 2 + \frac{1}{4} (x-2) - 4.1986 x(x-2) + 1.0680 (x-2)(x+2)$$

- lihat hal. 67 (perhatikan pada saat $R=0$, $E \neq 0$)

2. Metoda Subdomain (hal.67)

- Untuk setiap parameter a_i yang dibutuhkan, pilih satu interval Δx_i dalam domain. Pada setiap interval tersebut “paksa” residu rerata = 0,

$$\frac{1}{\Delta x_1} \int_{\Delta x_1} R(x; a) dx = 0, \frac{1}{\Delta x_2} \int_{\Delta x_2} R(x; a) dx = 0, \dots, \frac{1}{\Delta x_N} \int_{\Delta x_N} R(x; a) dx = 0$$

- Untuk N nilai a_i , akan diperoleh N sistem persamaan.
- Interval-interval Δx_i tersebut dinamai subdomain.

... Metoda Subdomain 1... (hal.68)

- Bagi subdomain menjadi: $\Delta x_1 = 1 < x < 1.5$ dan $\Delta x_1 = 1.5 < x < 2$, sehingga diperoleh dua persamaan.

$$\int_1^{1.5} \left(-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) dx = 0$$
$$\int_{1.5}^2 \left(-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) dx = 0$$

... Metoda Subdomain 2... (hal.68)

- diperoleh sistem persamaan
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a_1 + \frac{09}{8} a_2 &= \frac{19}{24} \\ \frac{3}{2} a_1 + \frac{63}{8} a_2 &= \frac{11}{24} \end{aligned}$$
- diperoleh nilai:
$$a_1 = 2.5417 \text{ dan } a_2 = -0.4259$$

... Metoda Subdomain 2... (hal.68)

- dengan nilai:

$$a_1 = 2.5417 \text{ dan } a_2 = -0.4259$$

- maka diperoleh “solusi coba”:

$$\hat{U}_S(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 2.5417(x-1)(x-3) - 0.4259(x-1)(x^2+x-11)$$

- dan debit/”flux”-nya:

$$\tau_S(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2) - 5.0834x(x-2) + 1.2777(x-2)(x+2)$$

- grafik hasil lihat hal. 69.

3. Metoda Kuadrat terkecil (hal.68)

- Minimumkan integral kuadrat residual dalam domain terhadap setiap parameter a_i , atau secara matematis ditulis sbb:

Minimumkan

$$\int_{\Omega} R^2(x; a) dx$$

- Agar nilai integral tersebut minimum diperlukan syarat yaitu derivasi integral tersebut untuk setiap a_i mempunyai nilai nol.

... Kuadrat terkecil 1... (hal.69)

- formulasinya:

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \int_{\Omega} R^2(x; a) dx = 0, \frac{\partial}{\partial a_2} \int_{\Omega} R^2(x; a) dx = 0, \dots, \frac{\partial}{\partial a_N} \int_{\Omega} R^2(x; a) dx = 0$$

- disederhanakan menjadi:

$$\int_{\Omega} R(x; a) \frac{\partial R(x; a)}{\partial a_1} dx = 0, \int_{\Omega} R(x; a) \frac{\partial R(x; a)}{\partial a_2} dx = 0, \dots,$$

$$\int_{\Omega} R(x; a) \frac{\partial R(x; a)}{\partial a_N} dx = 0$$

konstan 2 dieliminasi dari setiap integral di atas.

... Kuadrat terkecil 2... (hal.70)

- ... selanjutnya ...

$$\frac{\partial R(x; a)}{\partial a_1} = 4(x-1) \text{ dan } \frac{\partial R(x; a)}{\partial a_2} = 3(3x^2 - 4)$$

- substitusi kedalam residual menghasilkan

$$\int_1^2 \left(-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) 4(x-1) dx = 0$$
$$\int_1^2 \left(-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2 - 4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) 3(3x^2 - 4) dx = 0$$

... Kuadrat terkecil 3... (hal.71)

- jika integrasi dilakukan diperoleh sistem persamaan

$$16/3 a_1 + 027 a_2 = 8 \ln 2 - 7/2$$

$$27 a_1 + 711/5 a_2 = 33/4$$

- diperoleh nilai:

$$a_1 = 2.3155 \text{ dan } a_2 = -0.3816$$

... Kuadrat terkecil 4... (hal.71)

- dengan nilai:

$$a_1 = 2.3155 \text{ dan } a_2 = -0.3816$$

- maka diperoleh “solusi coba”:

$$\hat{U}_L(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 2.3155(x-1)(x-3) - 0.3816(x-1)(x^2+x-11)$$

- dan debit/”flux”-nya:

$$\tau_L(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2) - 4.6310x(x-2) + 1.1448(x-2)(x+2)$$

- grafik hasil lihat hal. 70 .

4. Metoda Galerkin (hal.71)

- Untuk setiap parameter a_i yang dibutuhkan, diharuskan rerata berbobot untuk residual = 0
- Fungsi yang digunakan sebagai pembobot adalah $\phi_i(x)$ yang terkait dengan Δx_i dalam domain.
- Untuk N nilai a_i , akan diperoleh N sistem persamaan

$$\int_{\Omega} R(x; a) \phi_1(x) dx = 0, \int_{\Omega} R(x; a) \phi_2(x) dx = 0, \dots, \\ \int_{\Omega} R(x; a) \phi_N(x) dx = 0$$

... Galerkin 1... (hal.71)

- substitusi residual dan fungsi bobot menghasilkan

$$\int_1^2 \left(-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) (x-1)(x-3) dx = 0$$

$$\int_1^2 \left(-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) (x-1)(x^2+x-11) dx = 0$$

- jika integrasi dilakukan diperoleh sistem persamaan

$$-05/3 a_1 - 41/5 a_2 = 29/6 - 8 \ln 2$$

$$-41/5 a_1 - 81/2 a_2 = 211/16 - 24 \ln 2$$

... Galerkin 2... (hal.72)

- dengan nilai:

$$a_1 = 2.3178 \text{ dan } a_2 = -0.3477$$

- maka diperoleh “solusi coba”:

$$\hat{U}_G(x) = 2 - \frac{1}{4} (x-1) + 2.3178 (x-1)(x-3) - 0.3477(x-1)(x^2+x-11)$$

- dan debit/”flux”-nya:

$$\tau_G(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (x-2) - 4.2756 x(x-2) + 1.0431 (x-2) (x+2)$$

- grafik hasil lihat hal. 73.

Resume Residual Berbobot (hal.72)

- Secara umum metoda residual berbobot dapat diformulasikan seperti di bawah. Sedangkan fungsi bobot yang digunakan tiap-tiap metoda berbeda (lihat hal.72-75).

$$\int_{\Omega} R(x; a) W_1(x) dx = 0, \int_{\Omega} R(x; a) W_2(x) dx = 0, \dots,$$
$$\int_{\Omega} R(x; a) W_N(x) dx = 0$$

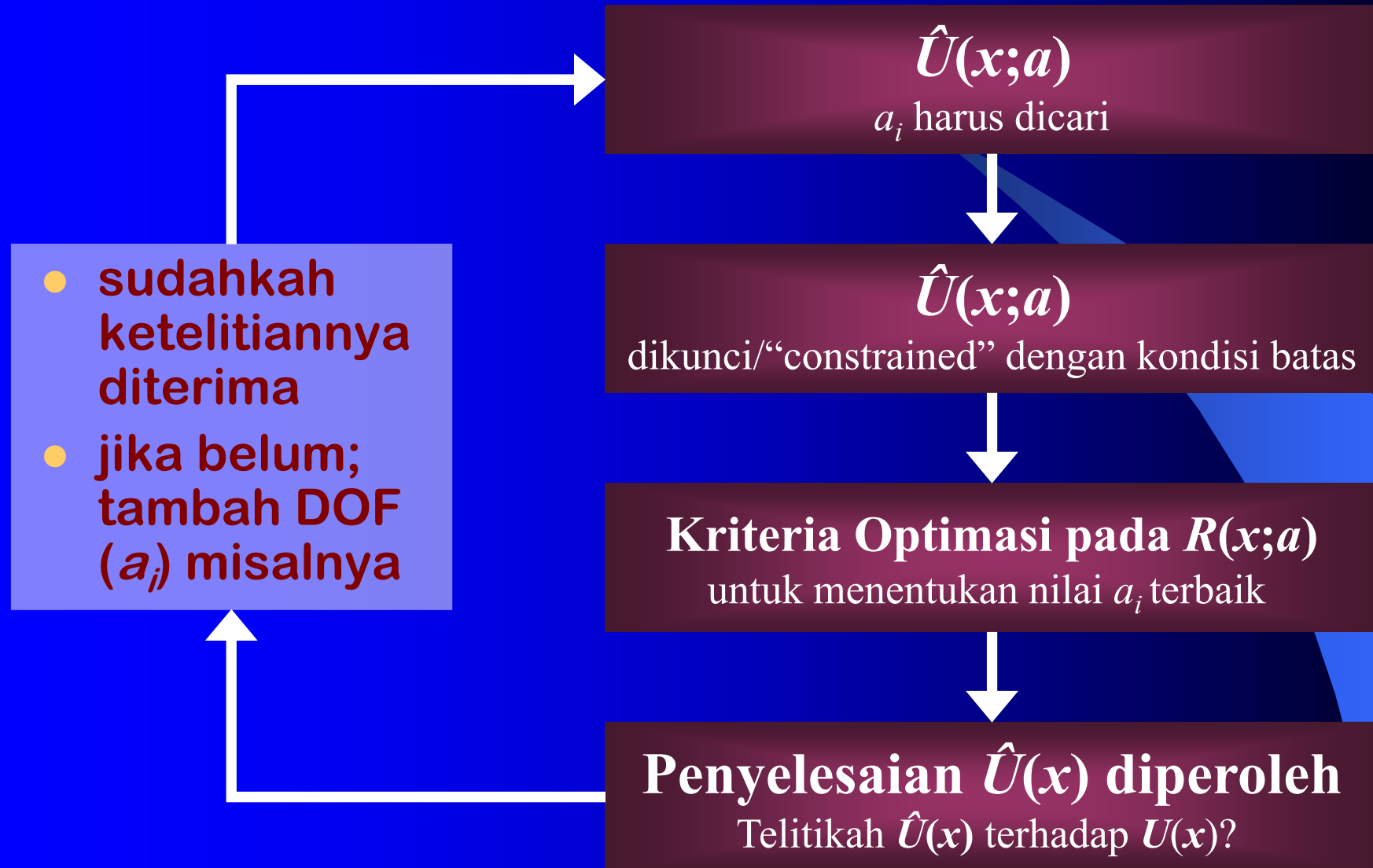
V. Metoda Variasi Ritz untuk $\hat{U}$ (hal.75)

- Metoda ini tidak dibahas di sini karena membutuhkan mata kuliah “Kalkulus Variasi”
- Hasil metoda ini sama dengan Metoda Galerkin.
- Bahkan beberapa ahli memberi nama kombinasi yaitu Metoda Ritz-Galerkin.
- Silakan lihat hal.(75-78)

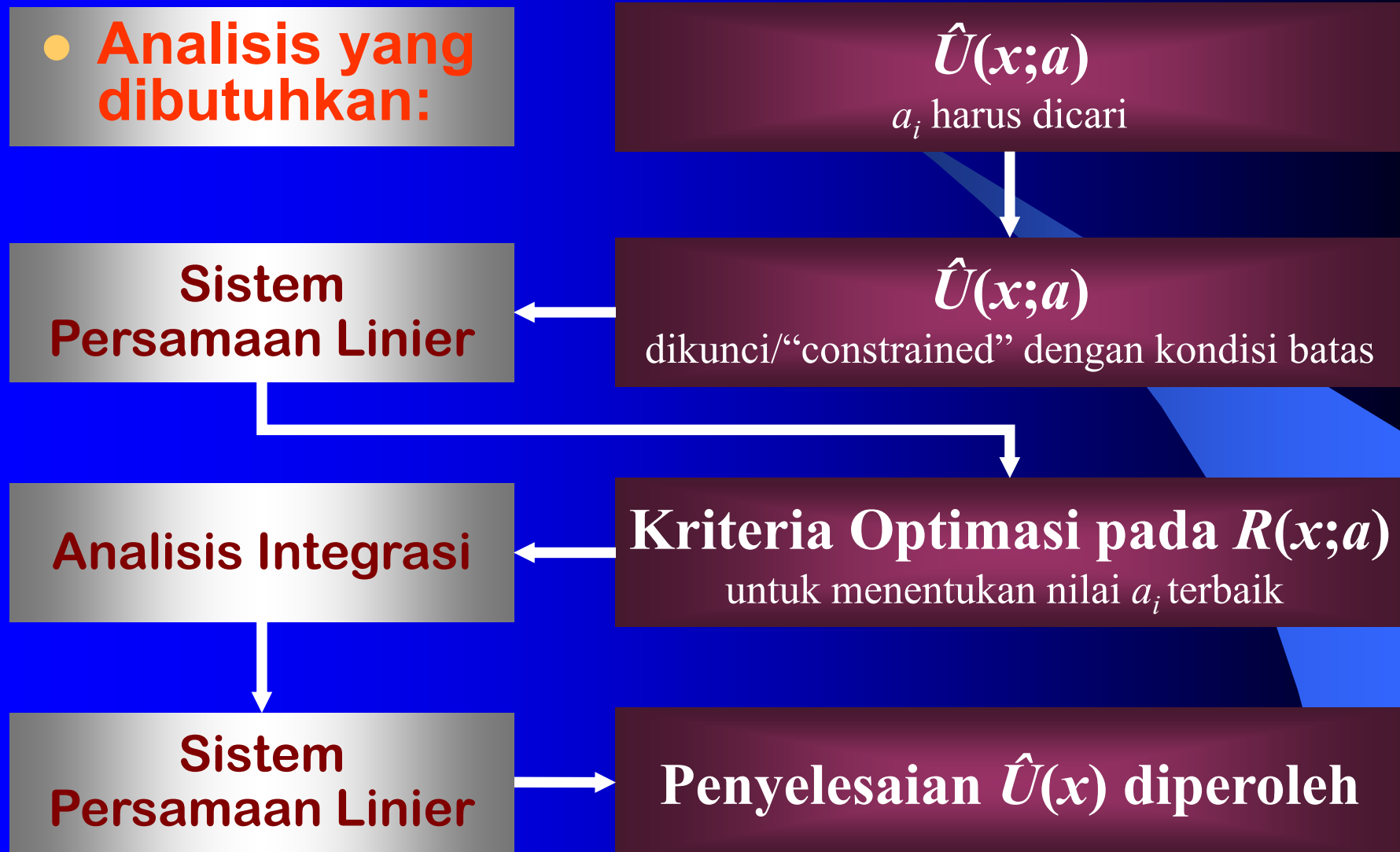
VI. Estimasi Ketelitian untuk $\hat{U}$ (hal.78)

- Semakin tinggi DOF yang digunakan, maka ketelitian “penyelesaian pendekatan”-nya makin tinggi
- Bahasan rinci silakan lihat hal.78-86)

Resume Memperoleh $\hat{U}(x)$



... Resume Memperoleh $\hat{U}(x)$



... be a winner ...



... and acts like
winners ..