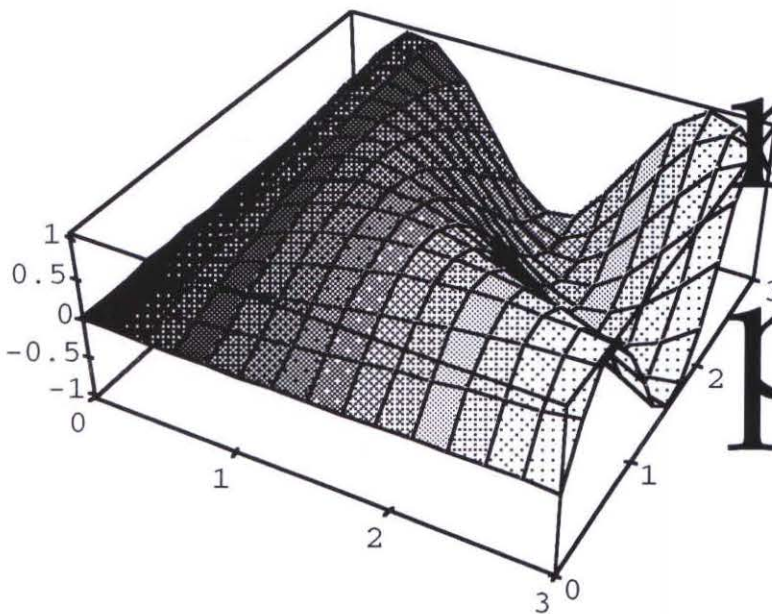


PELATIHAN REGIONAL
DRAINASE, FILTRASE
DAN
GEOTEKNIK

Aliran air dalam media porus



oleh
Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.

Juni 1998

PRAKATA

Kumpulan singkatan dan contoh soal ini disusun dengan tujuan memberikan pengenalan terhadap Aliran Air Tanah dalam Media Porus. Bahan ini bukan merupakan sebuah buku yang lengkap, namun lebih merupakan semacam garis besar pengenalan Aliran Air Tanah dalam Media Porus.

Pada bagian awal disajikan persamaan-persamaan dasar aliran air tanah baik dalam keadaan tunak (steady) maupun tak tunak (unsteady). Dari bab ini kemudian dilanjutkan dengan pengenalan konsep akuifer tekan dan nir tekan.

Pada bagian tengah disajikan jenis-jenis persamaan aliran air tanah secara radial. Kemudian dilanjutkan dengan analisis parameter media porus dengan menggunakan sumur pompa dan sumur pengamatan.

Pada bagian akhir disajikan contoh soal untuk setiap bab yang dijelaskan didepan, agar diperoleh pengertian yang jelas mengenai aplikasinya.

Kumpulan singkatan ini ditujukan untuk pemberian dasar-dasar Aliran Air Tanah dalam Media Porus kepada peserta "Pelatihan Regional: Drainase, Filtrase dan Geoteknik." Pelatihan ini diselenggarakan oleh HEDS/JICA-UNLAM, di Banjarmasin dari tanggal 8-15 Juni 1998. Bahan yang tercantum dalam buku ini akan diberikan selama 8 jam tatap muka.

Penyusun berharap agar bahan kursus ini berguna. Kritik membangun selalu diharapkan.

Yogyakarta, Juni 1998

Penyusun



Djoko Luknanto

PERSAMAAN DASAR ALIRAN AIR TANAH

➤ Aliran tak tunak 3-D:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = S \frac{\partial h}{\partial t}$$

dengan h adalah tinggi tekanan air, K adalah konduktivitas hidraulik, S adalah koefisien tampungan.

➤ Aliran tunak 3-D:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

➤ Aliran tunak 3-D, akuifer homogen dan isotropik:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Persamaan Laplace}$$

➤ Aliran tak tunak 3-D, akuifer homogen dan isotropik dengan koordinat radial

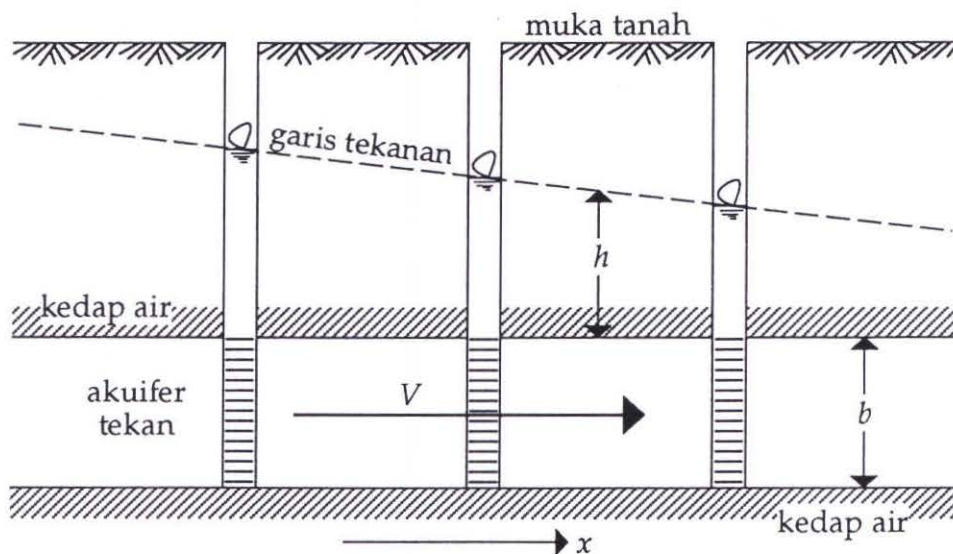
$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

dengan r adalah jarak dari sumbu koordinat, T adalah transmisivitas akuifer hidraulik.

HIDRAULIKA ALIRAN AIR TANAH

➤ Aliran tunak satu arah

□ Akuifer tekan dengan tebal seragam



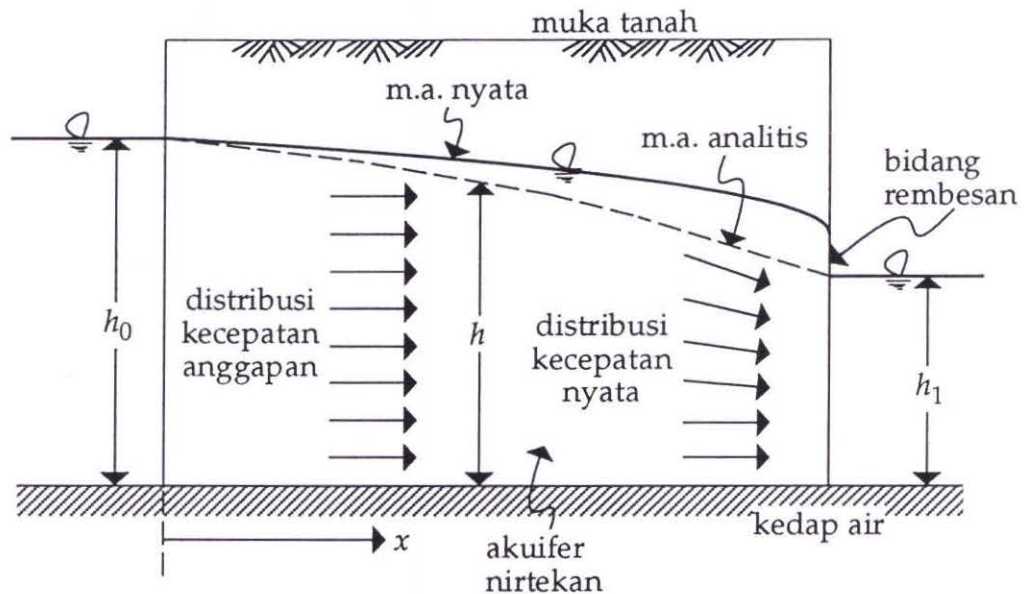
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= 0 \Rightarrow h = C_1 x + C_2 \\ \text{Jika } h &= 0 \text{ pada } x = 0 \text{ dan } \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{V}{K} \end{aligned} \right\} \Rightarrow h = -\frac{V}{K} x$$

Persamaan menjadi linier

HIDRAULIKA ALIRAN AIR TANAH

➤ Aliran tunak satu arah

□ Akuifer nirtekan



Andaian Dupuit Untuk Akuifer Nirtekan

1. Jika kemiringan garis rembesan kecil, maka garis aliran mendekati horisontal, sehingga garis equipotensial adalah vertikal.
2. Kemiringan garis rembesan sama dengan kemiringan tinggi tekanan.

□ **AQUIFER NIRTEKAN**

Debit aliran tiap satuan panjang tegak lurus gambar:

$$q = h \cdot V = -Kh \frac{dh}{dx}$$

□ **TANPA ISIAN**

$$qx = -\frac{K}{2} h^2 + C$$

dengan kondisi batas $h = h_0$ jika $x = 0$

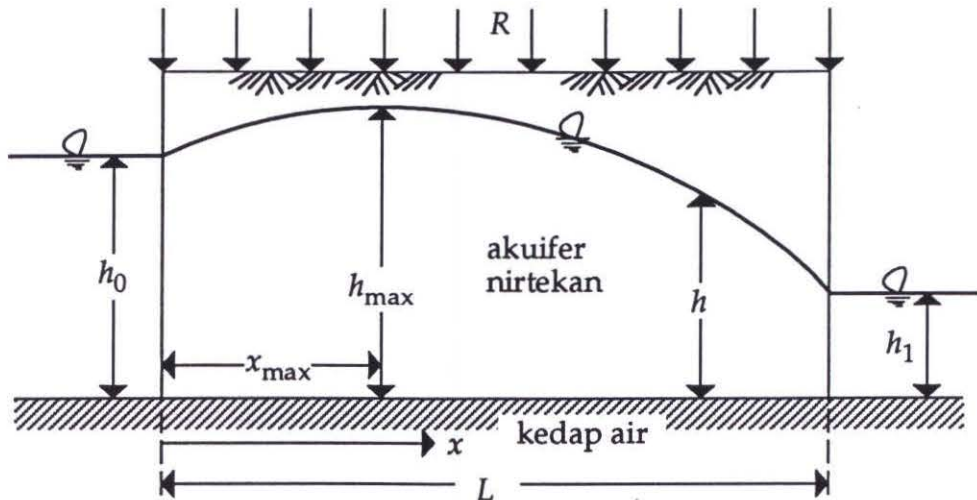
Persamaan menjadi Persamaan DUPUIT:

$$q = \frac{K}{2x} (h_0^2 - h^2) \Leftrightarrow q = \frac{K}{2L} (h_0^2 - h_1^2)$$

dengan L adalah lebar tanah antara dua sungai

satu arah, tunak, akuifer nirtekan, isian

□ DENGAN ISIAN (RECHARGE)



➤ $dq = Rdx \Rightarrow q = Rx + C$ kondisi batas $q = q_0$ jika $x = 0$ menjadi $q = Rx + q_0$ sehingga

➤ $Rx + q_0 = -Kh \frac{dh}{dx} \Rightarrow Rx^2 + 2q_0x + Kh^2 = Kh_0^2$

➡ Parabola muka air tanah:

$$h^2 = h_0^2 - \frac{R}{K}x^2 - \frac{2q_0}{K}x \Leftrightarrow q_0 = \frac{K}{2L}(h_0^2 - h_1^2) - \frac{RL}{2}$$

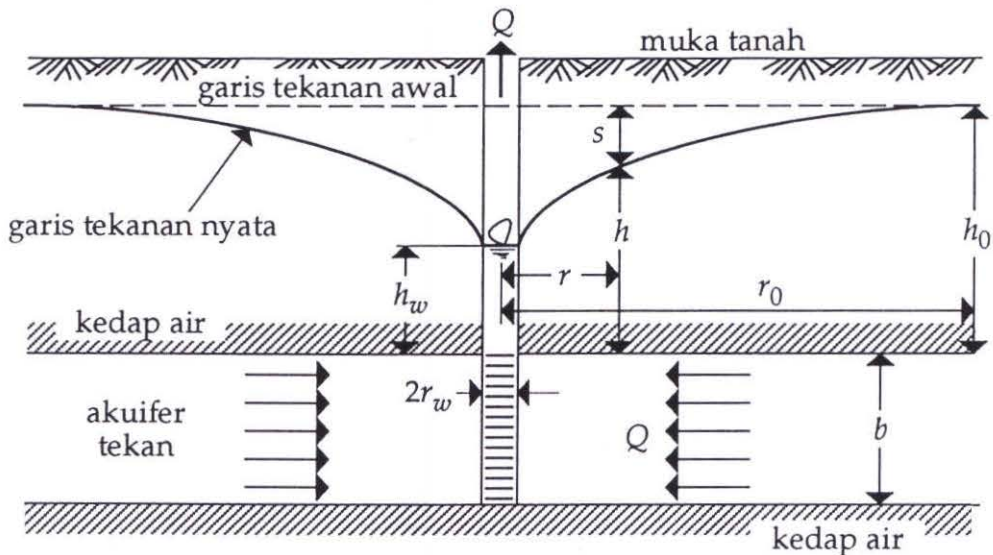
➡ Elevasi maximum $h_{\max}$ terjadi jika $\frac{dh}{dx} = 0$

$$-\frac{2R}{K}x - \frac{2q_0}{K} = 0 \Rightarrow x = -\frac{q_0}{R} = \frac{L}{2} - \frac{K}{2RL}(h_0^2 - h_1^2)$$

HIDRAULIKA SUMUR

➤ Aliran tunak

□ Akuifer tekan dengan tebal seragam



Persamaan debit yang menuju sumur pada kondisi setimbang (tunak)

$$Q = A \cdot V = (2\pi r b) \left(K \frac{dh}{dr} \right) \Rightarrow \frac{Q}{2\pi K b} \ln \frac{r}{r_0} = h - h_0$$

Persamaan garis tekanan:

$$h = h_0 + \frac{Q}{2\pi K b} \ln \frac{r}{r_0}$$

Persamaan debit tunak sumur THIEM:

$$Q = 2\pi K b \frac{h_0 - h_w}{\ln r_0 - \ln r_w}$$

➤ Aliran tunak

□ Cara menghitung T secara analitis

Jika pada dua buah sumur pengamatan diketahui kedalaman muka airnya yaitu h_1 dan h_2 , maka transmisivitas T dapat dihitung sebagai berikut:



$$T = Kb = \frac{Q}{2\pi} \frac{\ln(r_1/r_2)}{h_1 - h_2}$$

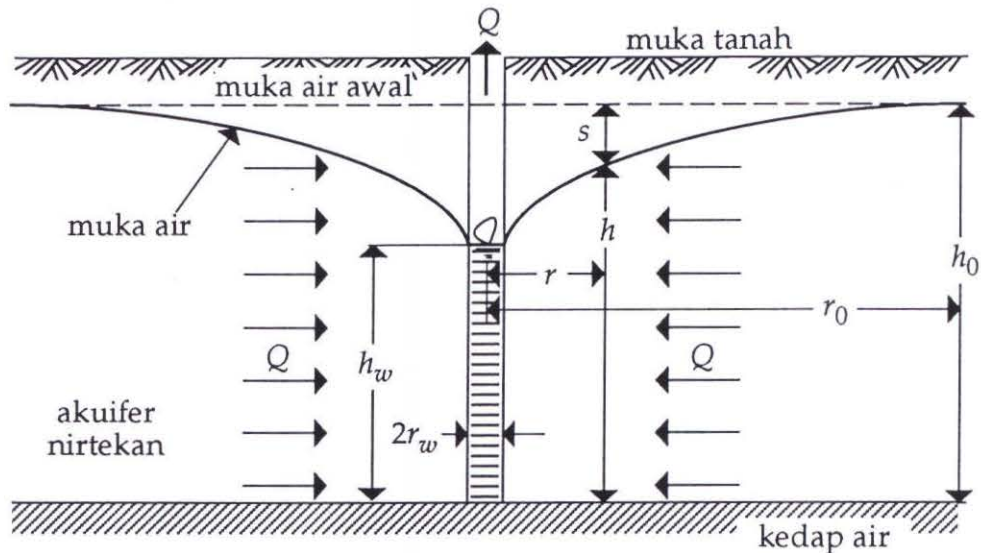
atau



$$T = \frac{Q}{2\pi} \frac{\ln(r_1/r_2)}{s_2 - s_1}$$

➤ Aliran tunak

□ Akuifer nirtekan



Persamaan debit yang menuju sumur pada kondisi setimbang (tunak)

$$Q = A \cdot V = (2\pi r h) \left(K \frac{dh}{dr} \right) \Rightarrow \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{r}{r_0} = h^2 - h_0^2$$

Persamaan garis tekanan:

$$h^2 = h_0^2 + \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{r}{r_0}$$

Persamaan debit tunak sumur nirtekan:

$$Q = \pi K \frac{h_0^2 - h_w^2}{\ln r_0 - \ln r_w}$$

➤ Aliran tunak

□ Cara menghitung T secara analitis

Jika pada dua buah sumur pengamatan diketahui kedalaman muka airnya yaitu h_1 dan h_2 , maka transmisivitas T dapat dihitung sebagai berikut:

$$Q = \pi K \frac{(h_2 + h_1)(h_2 - h_1)}{\ln r_2 - \ln r_1} = 2\pi K \underbrace{\left(\frac{h_2 + h_1}{2}\right)}_T \frac{(h_2 - h_1)}{\ln r_2 - \ln r_1}$$



$$K = \frac{Q}{\pi} \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{h_2^2 - h_1^2} = \frac{Q}{\pi} \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{(s_2 - s_1)(s_2 + s_1 - 2h_0)}$$

dan



$$T = K \left(\frac{h_2 + h_1}{2}\right) = \frac{Q}{2\pi} \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{h_2 - h_1} = \frac{Q}{2\pi} \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{s_1 - s_2}$$

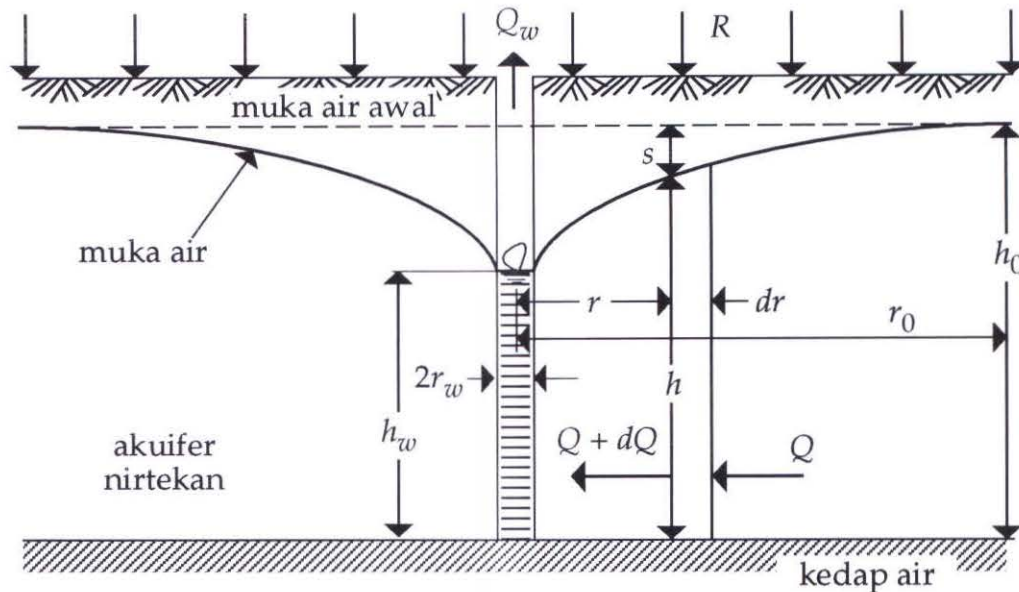
atau



$$T = Kh_0 = \frac{Qh_0}{\pi} \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{h_2^2 - h_1^2} = \frac{Q}{\pi} \frac{h_0(\ln r_2 - \ln r_1)}{(s_2 - s_1)(s_2 + s_1 - 2h_0)}$$

• Aliran tunak

❑ **Aquifer nirtekan**



$$dQ = -A \bullet R = -2\pi r dr \bullet R \Rightarrow Q = -\pi r^2 R + Q_w$$

Pada $r = r_0$ diperoleh debit tunak sumur nirtekan:

$$0 = -\pi r_0^2 R + Q_w \Rightarrow \boxed{Q_w = \pi r_0^2 R}$$

Persamaan debit yang menuju sumur pada kondisi setimbang (tunak)

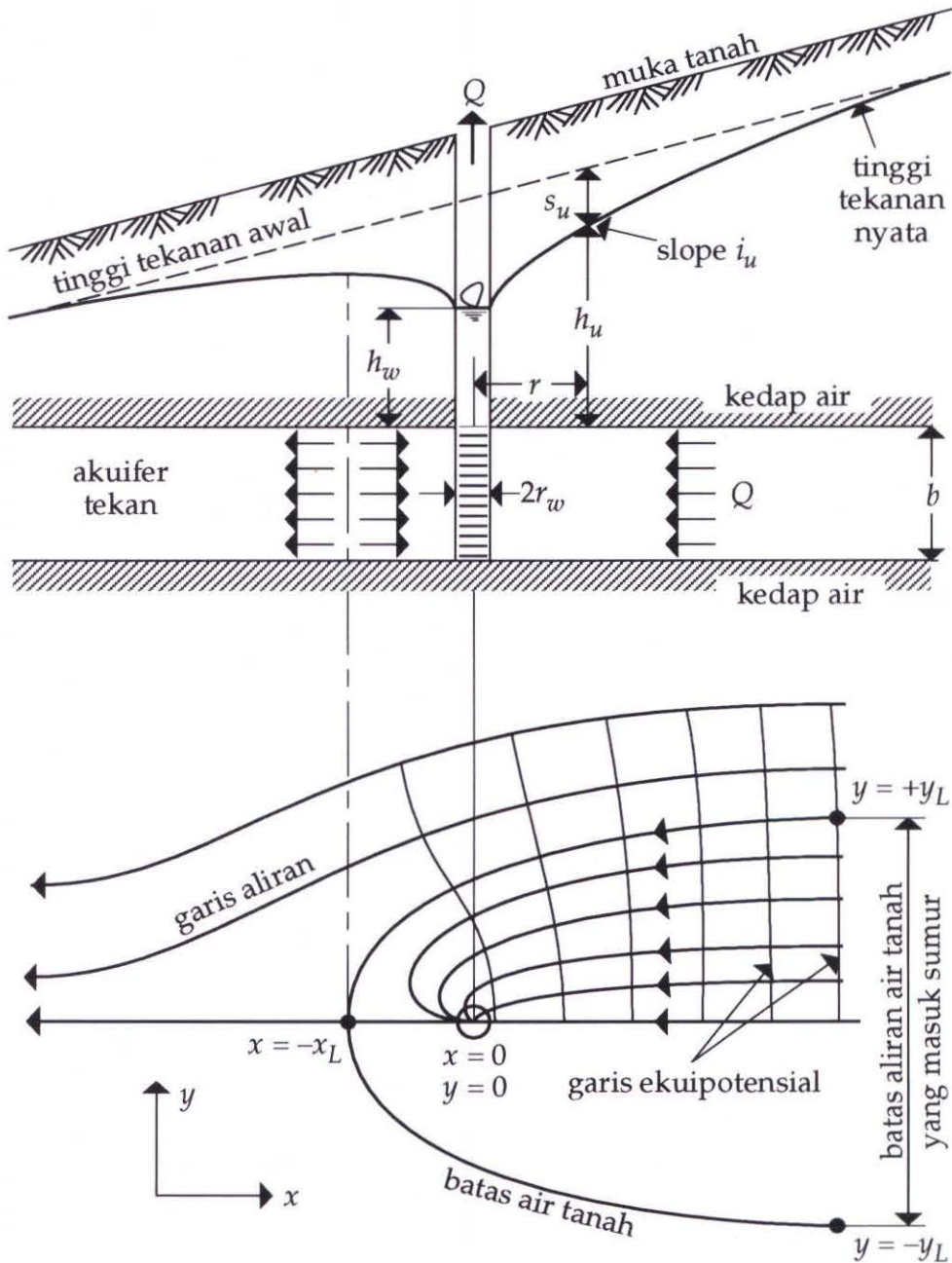
$$Q = A \bullet V = (2\pi r h) \left(K \frac{dh}{dr} \right) \Rightarrow -\pi r^2 R + Q_w = 2\pi K \frac{r}{dr} h dh$$

Persamaan garis tekanan:

$$h^2 = h_0^2 + \frac{Q_w}{\pi K} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) + \frac{R}{2K} (r_0^2 - r^2)$$

➤ Aliran tunak

□ Akuifer nirtekan dengan tinggi tekanan awal miring



► Aliran tunak

- **Aquifer nirtekan dengan tinggi tekanan awal miring**

$$K = \frac{2Q}{\pi r (h_d + h_u) (i_d + i_u)}$$

dengan Q adalah debit pemompaan, h_d dan h_u adalah tebal lapis jenuh air, dan i_d dan i_u adalah kemiringan muka air pada jarak r dari pompa ke arah hilir dan hulu.

- **Aquifer tekan dengan tinggi tekanan awal miring**

$$K = \frac{Q}{\pi r b (i_d + i_u)}$$

dengan Q adalah debit pemompaan, b adalah tebal aquifer tekan, dan i_d dan i_u adalah kemiringan garis tekanan pada jarak r dari pompa ke arah hilir dan hulu.

- **Batas aliran air tanah yang masuk kedalam sumur**

$$y_L = \pm \frac{Q}{2Kbi} \quad \text{dan} \quad x_L = - \frac{Q}{2\pi Kbi}$$

dengan i adalah kemiringan alami garis tekanan

➤ Aliran tak tunak

- Aliran tak tunak 3-D, akuifer homogen dan isotropik dengan koordinat radial

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

dengan r adalah jarak dari sumbu koordinat, T adalah transmisivitas hidrolik akuifer, S adalah koefisien tampungan.

⇒ Penyelesaian persamaan di atas:

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \underbrace{\int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du}_{W(u)} \quad \text{dan} \quad u = \frac{r^2 S}{4Tt}$$

$$s = \frac{Q}{4\pi T} W(u)$$

$$W(u) = \left[-0.5772 - \ln u + u - \frac{u^2}{2 \cdot 2!} + \frac{u^3}{3 \cdot 3!} - \dots + (-1)^{i+1} \frac{u^i}{i \cdot i!} + \dots \right]$$

dengan s adalah penurunan muka air.

► Aliran tak tunak

➤ **Metoda Theis:**
$$\left. \begin{aligned} s &= \left(\frac{Q}{4\pi T} \right) W(u) \\ \frac{r^2}{t} &= \left(\frac{4T}{S} \right) u \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{s}{r^2/t} = \left(\frac{SQ}{16\pi T^2} \right) \frac{W(u)}{u}$$

Jadi

$$\frac{s}{r^2/t} \text{ serupa } \frac{W(u)}{u}$$

Langkah-langkah:

- ① Dari data lapangan di buat kurva r^2/t dengan s pada skala log-log
- ② Dari hasil hitungan dibuat kurva u dengan $W(u)$ pada skala log-log
- ③ Kedua kurva tersebut diletakkan sedemikian rupa sehingga berimpit
- ④ Dicatat nilai $[s, W(u)]$ dan $[r^2/t, u]$ yang berkaitan misal:
 $[s, W(u)] = [A, B]$ dan $[r^2/t, u] = [C, D]$
- ⑤ Hitung nilai T dan S sebagai berikut:

$$T = \frac{Q \bullet B}{4\pi \bullet A} \quad \text{dan} \quad S = \frac{4 \bullet T \bullet D}{C}$$

➤ Aliran tak tunak

➤ **Metoda Cooper-Jacob:** Untuk nilai u kecil, maka

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \left[-0.5772 - \ln \frac{r^2 S}{4Tt} \right] \Rightarrow s = \frac{Q}{4\pi T} \left[\ln e^{-0.5772} - \ln \frac{r^2 S}{4Tt} \right]$$

Jadi
$$s = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2.25Tt}{r^2 S} = \frac{2.30Q}{4\pi T} \log \frac{2.25Tt}{r^2 S}$$

Langkah-langkah:

- ① Dari data lapangan di buat kurva $\log t$ dengan s yang merupakan garis lurus
- ② Pada waktu $t = t_0$, penurunan $s = 0$, maka

$$0 = \frac{2.30Q}{4\pi T} \log \frac{2.25Tt}{r^2 S} \Rightarrow \frac{2.25Tt_0}{r^2 S} = 1$$

sehingga:

$$S = \frac{2.25Tt_0}{r^2}$$

➤ Aliran tak tunak

➤ **Metoda Cooper-Jacob:** Untuk nilai u kecil, maka

Langkah-langkah:

③ Selisih dua pengukuran penurunan:

$$s_1 - s_2 = \frac{2.30Q}{4\pi T} \left(\log \frac{2.25Tt_1}{r^2 S} - \log \frac{2.25Tt_2}{r^2 S} \right)$$

$$\Delta s = \frac{2.30Q}{4\pi T} \log \frac{t_1}{t_2} \text{ jika nilai } \log \frac{t_1}{t_2} = 1$$

maka

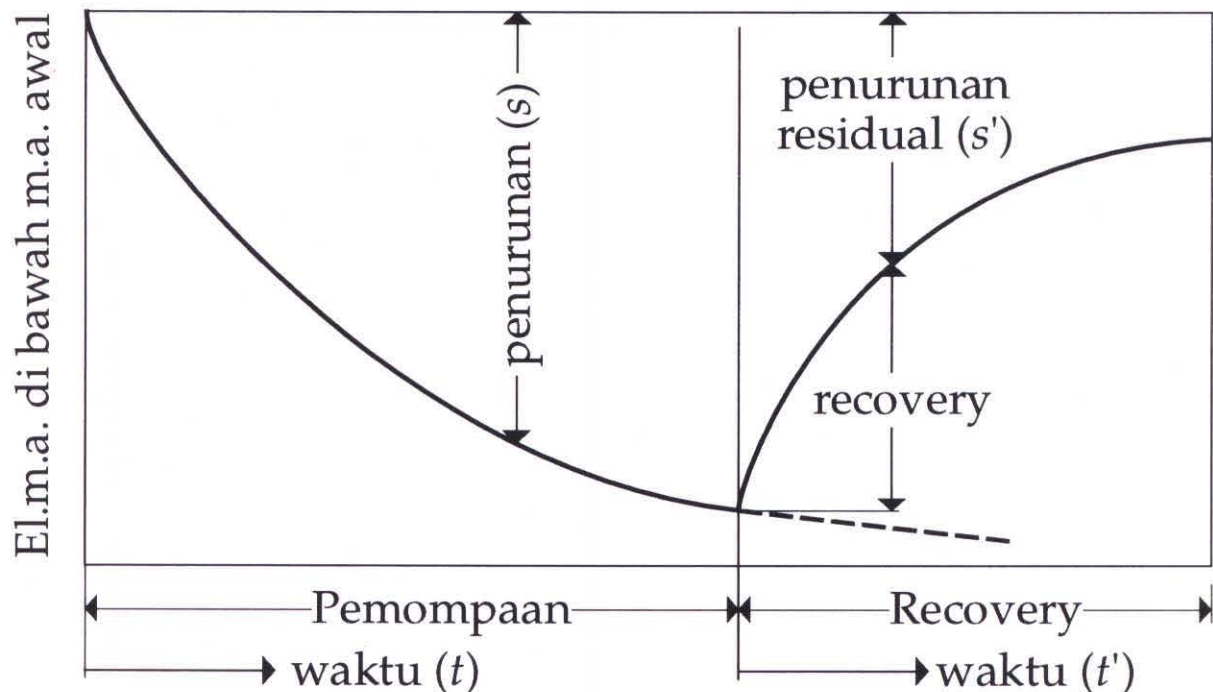
$$T = \frac{2.30Q}{4\pi \Delta s}$$

- ④ Kurva linier dari plot $(\log t, s)$ diperpanjang sampai memotong sumbu t , sehingga diperoleh t_0
- ⑤ Satu siklus log pada kurva akan menghasilkan Δs
- ⑥ Dari Butir ④ dan ⑤, kemudian dihitung nilai T dan S dengan rumus di atas.

➤ Aliran tak tunak

➤ Penaikan muka air sumur (recovery)

- ① Pada akhir dari tes pemompaan, pompa dihentikan sehingga elevasi muka air didalam sumur pengamatan akan naik kembali menuju ke elevasi semula.
- ② Besarnya penurunan (diukur dari muka air sebelum pemompaan) ini disebut dengan penurunan residual (s').
- ③ Data yang diperoleh dapat digunakan untuk menghitung nilai T , sehingga dapat digunakan sebagai pembanding nilai T yang diperoleh dari tes pemompaan awal.



➤ Aliran tak tunak

- Penurunan residual dapat dihitung dengan superposisi dua sumur dengan debit Q pada saat mulai pemompaan dan debit $-Q$ pada saat pemompaan dihentikan

$$\begin{aligned}
 s' &= \underbrace{\frac{Q}{4\pi T} W(u)}_{\text{pompa semula aktif terus}} + \underbrace{\frac{-Q}{4\pi T} W(u')}_{\text{pompa baru } -Q} \\
 &= \frac{Q}{4\pi T} [W(u) - W(u')] \\
 &= \frac{Q}{4\pi T} \left[-0.5772 - \ln \frac{r^2 S}{4Tt} - \left\{ -0.5772 - \ln \frac{r^2 S}{4Tt'} \right\} \right]
 \end{aligned}$$



$$s' = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{t}{t'} \Rightarrow \Delta s' = \frac{2.30Q}{4\pi T} \log \frac{(t/t')_1}{(t/t')_2}$$

Langkah-langkah:

- ① Dari data lapangan di buat kurva $\log (t/t')$ dengan s'
- ② Satu siklus log pada kurva akan menghasilkan $\Delta s'$
- ③ Hitung nilai T berikut:

$$T = \frac{2.30Q}{4\pi \Delta s'}$$



► Sistem Sumur

- Penurunan muka air akibat pemompaan dari N sumur merupakan jumlah penurunan masing-masing sumur.

$$s = \sum_{i=1}^N s_i$$

① Akuifer tekan

✧ Sumur tunggal

$$h = h_0 + \frac{Q}{2\pi Kb} \ln \frac{r}{r_0}$$

$$h_0 - h = - \frac{Q}{2\pi Kb} \ln \frac{r}{r_0}$$



$$s = \frac{Q}{2\pi Kb} \ln \frac{r_0}{r}$$

✧ Sumur majemuk



$$s = \frac{1}{2\pi Kb} \sum_{i=1}^N \left(Q \ln \frac{r_0}{r} \right)_i$$

► Sistem Sumur

- Penurunan muka air akibat pemompaan dari N sumur merupakan jumlah penurunan masing-masing sumur.

$$s = \sum_{i=1}^N s_i$$

② Akuifer nirtekan

✂ Sumur tunggal

$$h_0^2 = h^2 + \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{r_0}{r} \Rightarrow h = \sqrt{h_0^2 - \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{r_0}{r}}$$

$$h_0 - s = \sqrt{h_0^2 - \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{r_0}{r}}$$



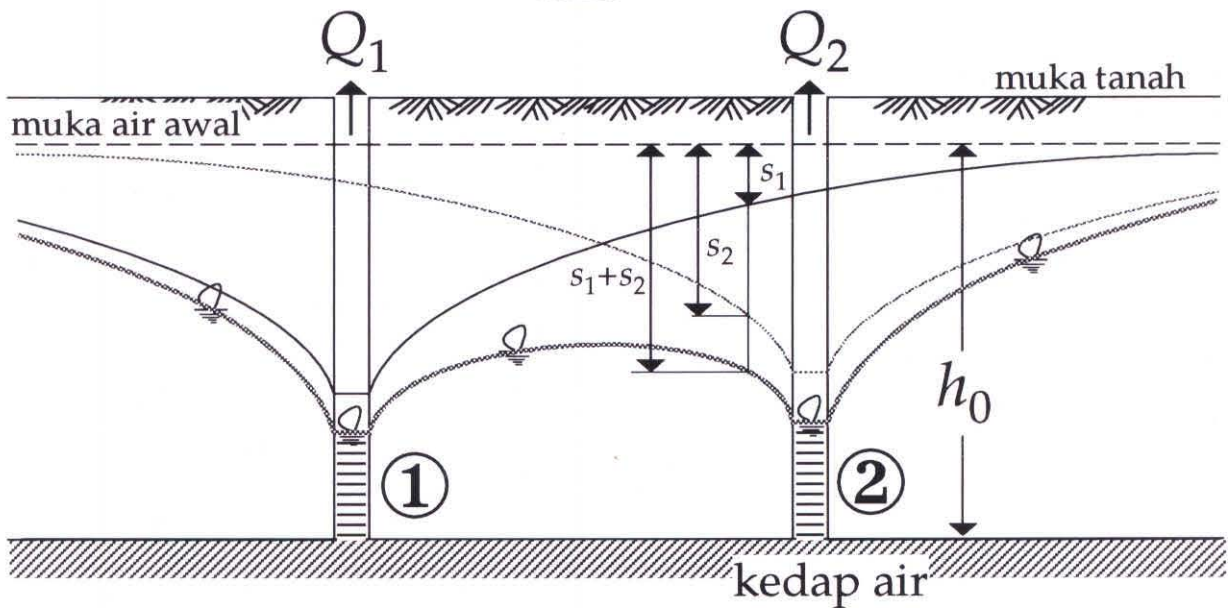
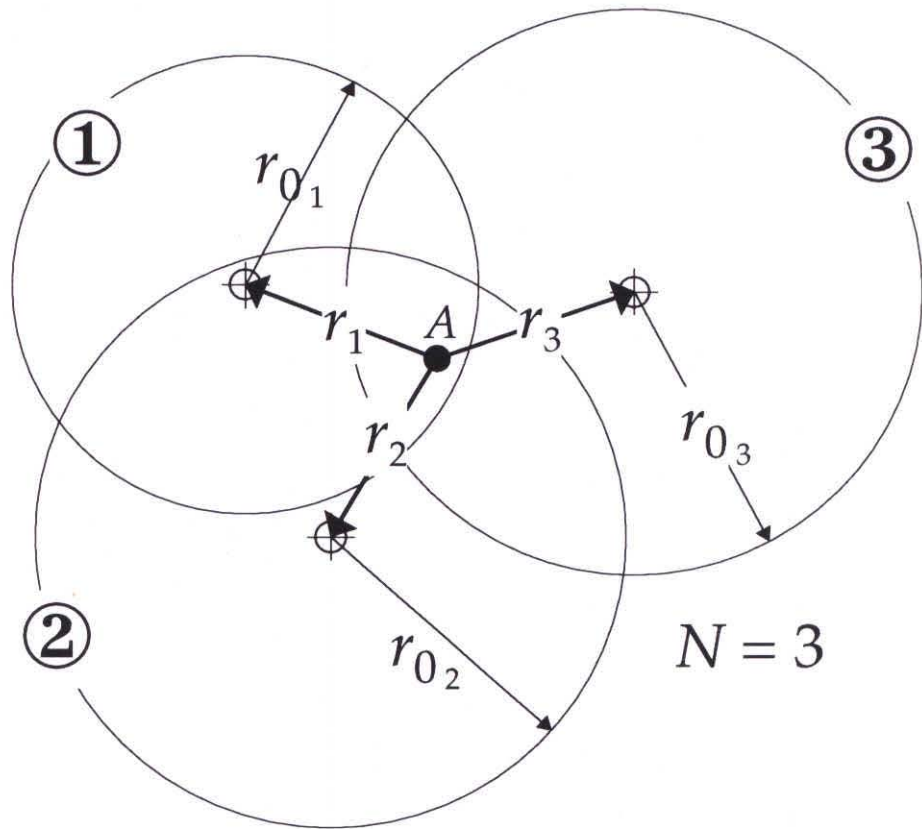
$$s = h_0 - \sqrt{h_0^2 - \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{r_0}{r}}$$

✂ Sumur majemuk

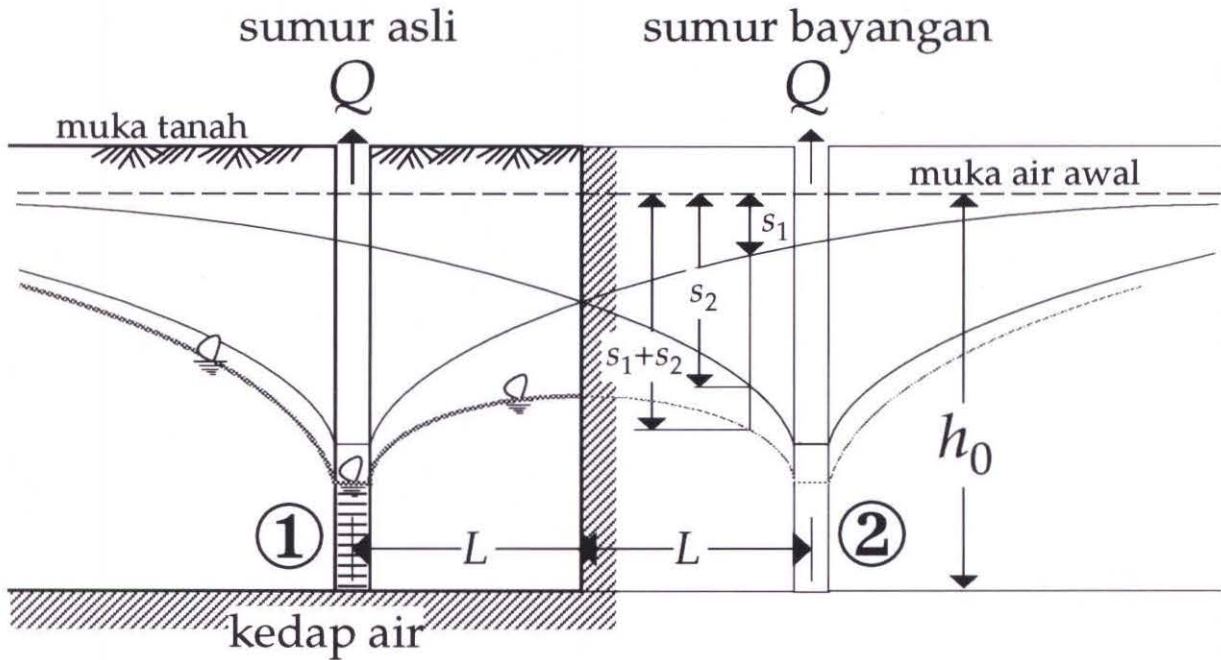


$$s = Nh_0 - \sum_{i=1}^N \sqrt{h_0^2 - \frac{Q}{\pi K} \ln \left(\frac{r_0}{r} \right)_i}$$

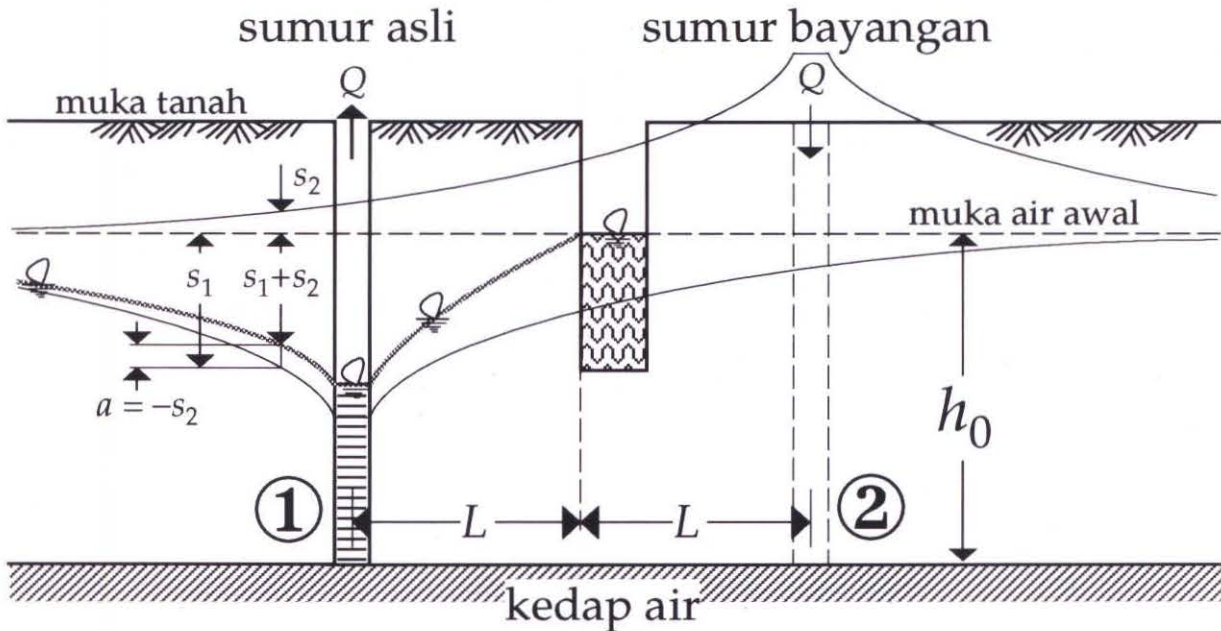
► Sistem Sumur



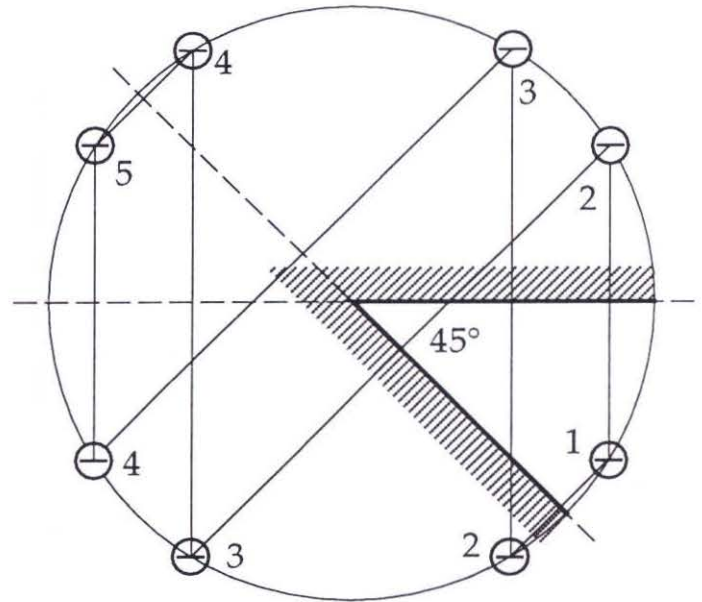
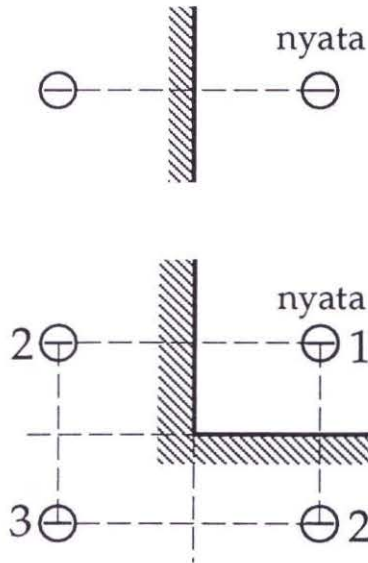
➤ Sistem Sumur Bayangan Untuk Lapis Kedap Air



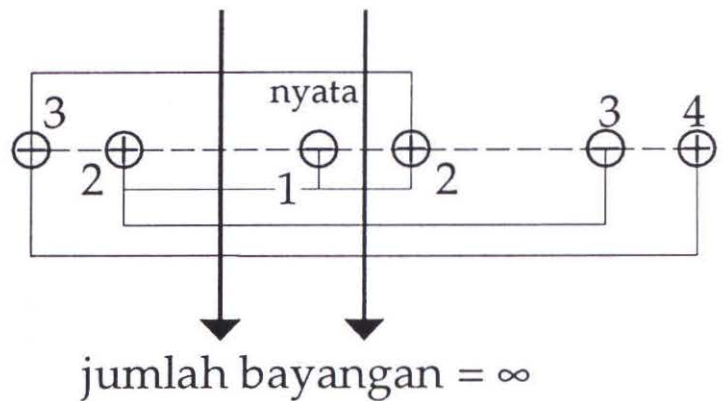
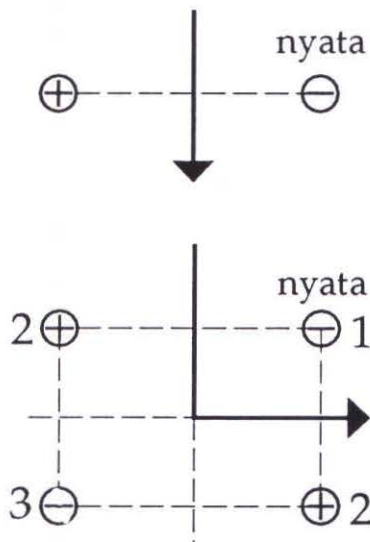
➤ Sistem Sumur Bayangan Dekat Sungai



➤ Sistem Sumur Bayangan Untuk Lapis Kedap Air



➤ Sistem Sumur Bayangan Dekat Sungai



CONTOH SOAL

Soal Akuifer Nirtekan Diapit Dua Sungai (Recharge Diketahui)

Sebuah akuifer nirtekan berada diatas suatu lapisan tanah horisontal yang kedap air. Akuifer nirtekan ini mempunyai konduktivitas hidraulis $K = 0.00015$ m/detik. Dua sungai yang saling sejajar berjarak 1200 m.

Elevasi muka air di kedua sungai tersebut diukur dari lapisan kedap air, masing-masing 18 m dan 20 m.

Berapa elevasi maximum muka air dalam akuifer, jika recharge pada musim hujan yang masuk kedalam akuifer adalah 2.30×10^{-8} m/detik?

Jawaban Soal Akuifer Nirtakan Diapit Dua Sungai (Recharge Diketahui)

Diketahui:

$$K = 1.50E-04 \text{ m/detik}$$

$$h_{\text{kiri}} = 18.0 \text{ m}$$

$$h_{\text{kanan}} = 20.0 \text{ m}$$

$$\text{Recharge, } P = 2.30E-08 \text{ m/detik}$$

$$B_{\text{akuifer}} = 1200.0 \text{ m}$$

Dihitung:

$$h_{\text{max}} = 20.58 \text{ m}$$

Formulasi:

$$\text{Darcy: } q = -Kh \frac{dh}{dx}$$

$$\text{Kombinasi: } h \, dh = -\frac{P}{K} x \, dx - \frac{C_1}{K} dx$$

$$\text{Kontinuitas: } \frac{dq}{dx} = q \text{ atau } q = Px + C_1 \quad \text{Integrasi: } h^2 = -\frac{P}{K} x^2 - \frac{2C_1}{K} x + C_2$$

$$\text{Kondisi batas kanan: } x = B_{\text{akuifer}}, h = h_{\text{kanan}}$$

$$\text{Kondisi batas kiri: } x = 0, h = h_{\text{kiri}}$$

$$h_{\text{kanan}}^2 = -\frac{P}{K} B_{\text{akuifer}}^2 - \frac{2C_1}{K} B_{\text{akuifer}} + C_2$$

$$0.5 \cdot (h_{\text{kiri}}^2 - h_{\text{kanan}}^2) \frac{K}{B_{\text{akuifer}}} - 0.5 \cdot P B_{\text{akuifer}} = C_1 \dots (2)$$

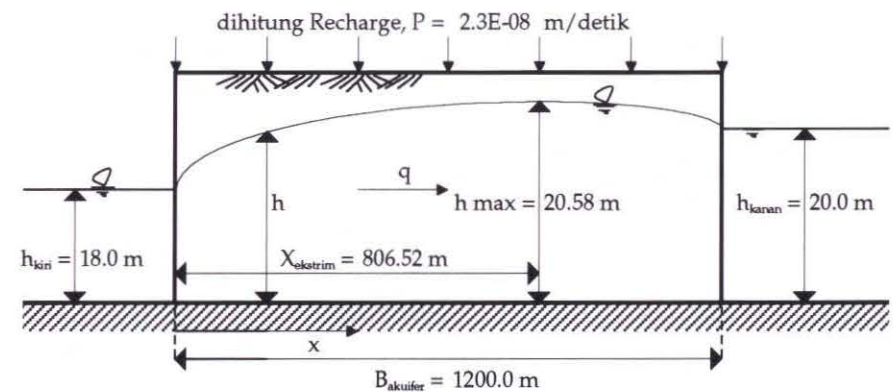
$$h_{\text{kiri}}^2 = C_2 \dots (1)$$

Elevasi muka air ekstrim (maximum atau minimum) terjadi jika

$$q = Px + C_1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{C_1}{P}$$

$$\text{atau } h_{\text{ekstrim}}^2 = -\frac{C_1^2}{K^2 P} + \frac{2C_1^2}{K P} + C_2 \Rightarrow h_{\text{ekstrim}}^2 = \frac{C_1^2}{K P} + C_2 \dots (3)$$

$$\text{sehingga } h_{\text{ekstrim}}^2 - C_2 = \frac{C_1^2}{K P} \Rightarrow P = \frac{C_1^2}{K (h_{\text{ekstrim}}^2 - C_2)} \dots (4)$$



Penyelesaian:

$$\bullet \bullet \text{ Dari Pers.(1): } C_2 = 18 \cdot 18 = 324 \text{ m}^2.$$

$$\bullet \bullet \text{ Pers.(2) ditulis sebagai } C_1 = A + B \cdot P \dots (5)$$

$$\text{dengan: } A = 0.5 \cdot (18^2 - 20^2) \cdot 0.00015 / 1200 = -0.00000475$$

$$B = 0.5 \cdot 1200 = -600$$

$$\bullet \bullet \text{ Dari Pers.(5): } C_1 = -0.00000475 + (-600) \cdot (0.000000023) = -1.86 \cdot E-05$$

$$\bullet \bullet \text{ Elevasi muka air maximum dapat dihitung dari Pers.(4) sbb:}$$

$$h^2 = -0.00001855^2 / 0.00015 / 0.000000023 + (324) = 423.739855072463$$

$$h = \sqrt{423.739855072463} = 20.585 \text{ m}$$

$$\bullet \bullet \text{ Nilai X maximum dapat dihitung sebagai } X = -C_1 / P$$

$$X = -(-1.86 \cdot E-05) / (2.30 \cdot E-08) = 806.522 \text{ m}$$

Soal Akuifer Nirtekan Diapit Dua Sungai (Elevasi muka air maksimum diketahui)

Sebuah akuifer nirtekan berada diatas suatu lapisan tanah horisontal yang kedap air. Akuifer nirtekan ini mempunyai konduktivitas hidraulis $K = 0.0003 \text{ m/detik}$. Dua sungai yang saling sejajar berjarak 1500 m.

Elevasi muka air di kedua sungai tersebut diukur dari lapis kedap air, masing-masing 20 m dan 22 m.

Berapa besar recharge pada musim hujan yang masuk kedalam akuifer, jika muka air tanah maximum didalam akuifer adalah 25 m diukur dari lapis kedap air?

Jawaban Soal Akuifer Nirtakan Diapit Dua Sungai (Elevasi muka air maksimum diketahui)

Diketahui:

$$\begin{aligned} K &= 0.0003 \text{ m/detik} \\ h_{\text{kiri}} &= 20.0 \text{ m} \\ h_{\text{kanan}} &= 22.0 \text{ m} \\ h_{\text{ekstrim}} &= 25.0 \text{ m} \\ B_{\text{akuifer}} &= 1500.0 \text{ m} \end{aligned}$$

Dihitung:

$$\text{Recharge, } P = 9.63\text{E-}08 \text{ m/detik}$$

Formulasi:

$$\text{Darcy: } q = -Kh \frac{dh}{dx}$$

$$\text{Kombinasi: } h dh = -\frac{P}{K} x dx - \frac{C_1}{K} dx$$

$$\text{Kontinuitas: } \frac{dq}{dx} = q \text{ atau } q = Px + C_1 \quad \text{Integrasi: } h^2 = -\frac{P}{K} x^2 - \frac{2C_1}{K} x + C_2$$

$$\text{Kondisi batas kanan: } x = B_{\text{akuifer}}, h = h_{\text{kanan}}$$

$$\text{Kondisi batas kiri: } x = 0, h = h_{\text{kiri}}$$

$$h_{\text{kanan}}^2 = -\frac{P}{K} B_{\text{akuifer}}^2 - \frac{2C_1}{K} B_{\text{akuifer}} + C_2$$

$$h_{\text{kiri}}^2 = C_2 \dots (1)$$

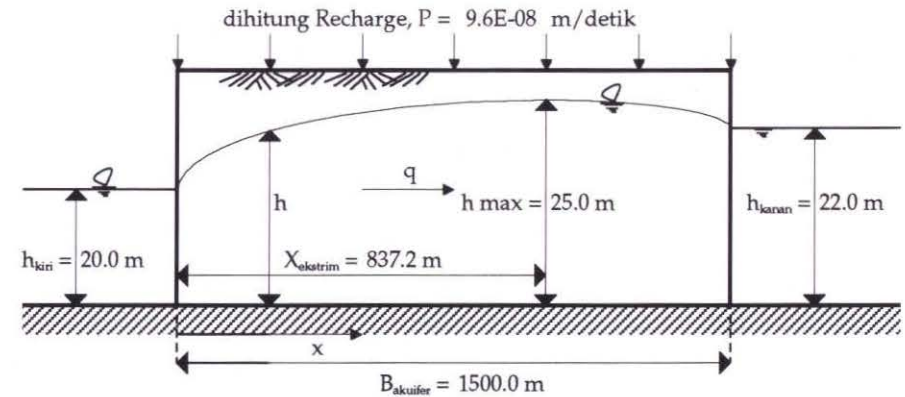
$$0.5 \cdot (h_{\text{kiri}}^2 - h_{\text{kanan}}^2) \frac{K}{B_{\text{akuifer}}} - 0.5 \cdot P B_{\text{akuifer}} = C_1 \dots (2)$$

Elevasi muka air ekstrim (maximum atau minimum) terjadi jika

$$q = Px + C_1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{C_1}{P}$$

$$\text{atau } h_{\text{ekstrim}}^2 = -\frac{C_1^2}{K P} + \frac{2C_1^2}{K P} + C_2 \Rightarrow h_{\text{ekstrim}}^2 = \frac{C_1^2}{K P} + C_2 \dots (3)$$

$$\text{sehingga } h_{\text{ekstrim}}^2 - C_2 = \frac{C_1^2}{K P} \Rightarrow P = \frac{C_1^2}{K (h_{\text{ekstrim}}^2 - C_2)} \dots (4)$$



Penyelesaian:

- Dari Pers.(1): $C_2 = 20 \cdot 20 = 400 \text{ m}^2$.
- Pers.(2) ditulis sebagai $C_1 = A + B \cdot P \dots (5)$
dengan: $A = 0.5 \cdot (20^2 - 22^2) \cdot 0.0003 / 1500 = -0.0000084$
 $B = 0.5 \cdot 1500 = -750$
- Pers.(4) ditulis sebagai $P = D \cdot C_1^2 \dots (6)$
dengan: $D = 1 / 0.0003 / (25^2 - 400) = 14.815$
- Kombinasi Pers.(5) & (6) menghasilkan persamaan kuadrat:
 $(8333333.33) \cdot P^2 + (-0.813) \cdot P + (1.05\text{E-}09) = 0$
 $P_1 = \{0.8133 + \sqrt{(0.6267)}\} / 2 / 8333333.333 = 9.63\text{E-}08 \text{ m/detik}$
 $P_2 = \{0.8133 - \sqrt{(0.6267)}\} / 2 / 8333333.333 = 1.30\text{E-}09 \text{ m/detik}$
- Check nilai X_{ekstrim} dengan nilai $-C_1/P$:
 $X_1 = \{-8.40\text{E-}06 / 9.63\text{E-}08 + (-750)\} = 837.230 \text{ m (terpakai)}$
 $X_2 = \{-8.40\text{E-}06 / 1.30\text{E-}09 + (-750)\} = 7198.484 \text{ m (tidak terpakai)}$
- Jadi nilai digunakan:
 $P = 9.630\text{E-}08 \text{ m/detik} \quad X_{\text{ekstrim}} = 837.23 \text{ m}$

Soal Akuifer Nirtekan Diapit Dua Sungai (Evaporasi Diketahui)

Sebuah akuifer nirtekan berada diatas suatu lapisan tanah horisontal yang kedap air. Akuifer nirtekan ini mempunyai konduktivitas hidraulis $K = 0.0003 \text{ m/detik}$. Dua sungai yang saling sejajar berjarak 1500 m.

Elevasi muka air di kedua sungai tersebut diukur dari lapisan kedap air, masing-masing 20 m dan 22 m.

Berapa elevasi minimum muka air dalam akuifer, jika evaporasi yang keluar dari akuifer adalah $1.20 \times 10^{-7} \text{ m/detik}$?

Jawaban Soal Akuifer Nirtekan Diapit Dua Sungai (Evaporasi Diketahui)

Diketahui:

$$K = 3.00E-04 \text{ m/detik}$$

$$h_{\text{kiri}} = 20.0 \text{ m}$$

$$h_{\text{kanan}} = 22.0 \text{ m}$$

$$\text{Evaporasi, } P = -1.20E-07 \text{ m/detik}$$

$$B_{\text{akuifer}} = 1500.0 \text{ m}$$

Dihitung:

$$h_{\text{min}} = 14.7 \text{ m}$$

Formulasi:

$$\text{Darcy: } q = -Kh \frac{dh}{dx}$$

$$\text{Kombinasi: } h dh = -\frac{P}{K} x dx - \frac{C_1}{K} dx$$

$$\text{Kontinuitas: } \frac{dq}{dx} = q \text{ atau } q = Px + C_1 \quad \text{Integrasi: } h^2 = -\frac{P}{K} x^2 - \frac{2C_1}{K} x + C_2$$

$$\text{Kondisi batas kanan: } x = B_{\text{akuifer}}, h = h_{\text{kanan}}$$

$$\text{Kondisi batas kiri: } x = 0, h = h_{\text{kiri}}$$

$$h_{\text{kanan}}^2 = -\frac{P}{K} B_{\text{akuifer}}^2 - \frac{2C_1}{K} B_{\text{akuifer}} + C_2$$

$$0.5 \cdot (h_{\text{kiri}}^2 - h_{\text{kanan}}^2) \frac{K}{B_{\text{akuifer}}} - 0.5 \cdot P B_{\text{akuifer}} = C_1 \dots (2)$$

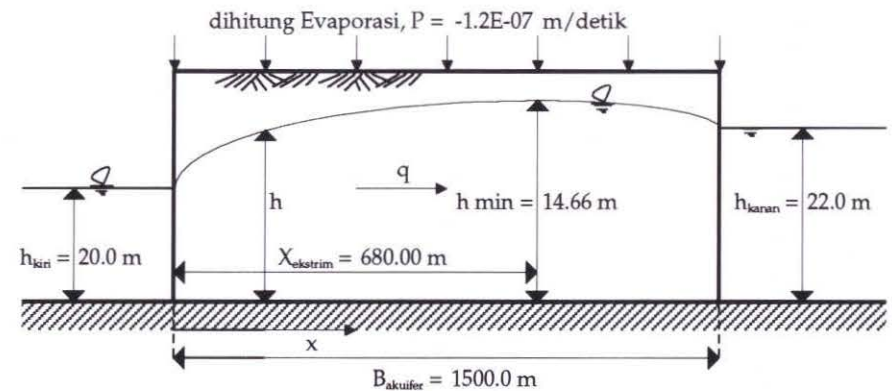
$$h_{\text{kiri}}^2 = C_2 \dots (1)$$

Elevasi muka air ekstrim (maximum atau minimum) terjadi jika

$$q = Px + C_1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{C_1}{P}$$

$$\text{atau } h_{\text{ekstrim}}^2 = -\frac{C_1^2}{K^2 P} + \frac{2C_1^2}{K^2 P} + C_2 \Rightarrow h_{\text{ekstrim}}^2 = \frac{C_1^2}{K^2 P} + C_2 \dots (3)$$

$$\text{sehingga } h_{\text{ekstrim}}^2 - C_2 = \frac{C_1^2}{K^2 P} \Rightarrow P = \frac{C_1^2}{K(h_{\text{ekstrim}}^2 - C_2)} \dots (4)$$



Penyelesaian:

- Dari Pers.(1): $C_2 = 20 \cdot 20 = 400 \text{ m}^2$.

- Pers.(2) ditulis sebagai $C_1 = A + B \cdot P \dots (5)$

$$\text{dengan: } A = 0.5 \cdot (20^2 - 22^2) \cdot 0.0003 / 1500 = -0.0000084$$

$$B = 0.5 \cdot 1500 = -750$$

- Dari Pers.(5): $C_1 = -0.0000084 + (-750) \cdot (-0.00000012) = 8.16 \cdot 10^{-5}$

- Elevasi muka air minimum dapat dihitung dari Pers.(4) sbb:

$$h^2 = 0.0000816^2 / 0.0003 / -0.00000012 + (400) = 215.04$$

$$h = \sqrt{215.04} = 14.664 \text{ m}$$

- Nilai X minimum dapat dihitung sebagai $X = -C_1 / P$

$$X = -(8.16 \cdot 10^{-5}) / (-1.20 \cdot 10^{-7}) = 680.000 \text{ m}$$

Soal Akuifer Nirtekan Diapit Dua Sungai (Evaporasi Diketahui)

Sebuah akuifer nirtekan berada diatas suatu lapisan tanah horisontal yang kedap air. Akuifer nirtekan ini mempunyai konduktivitas hidraulis $K = 0.00025 \text{ m/detik}$. Dua sungai yang saling sejajar berjarak 300 m.

Elevasi muka air di kedua sungai tersebut diukur dari lapisan kedap air, masing-masing 5 m dan 5 m.

Berapa elevasi minimum muka air dalam akuifer, jika evaporasi yang keluar dari akuifer adalah $1.20 \times 10^{-7} \text{ m/detik}$?

Jawaban Soal Akuifer Nirtakan Diapit Dua Sungai (Evaporasi Diketahui)

Diketahui:

$$K = 2.50 \times 10^{-4} \text{ m/detik}$$

$$h_{\text{kiri}} = 5.0 \text{ m}$$

$$h_{\text{kanan}} = 5.0 \text{ m}$$

$$\text{Evaporasi, } P = -1.20 \times 10^{-7} \text{ m/detik}$$

$$B_{\text{akuifer}} = 300.0 \text{ m}$$

Dihitung:

$$h_{\text{min}} = 3.77 \text{ m}$$

Formulasi:

$$\text{Darcy: } q = -Kh \frac{dh}{dx}$$

$$\text{Kombinasi: } h \, dh = -\frac{P}{K} x \, dx - \frac{C_1}{K} dx$$

$$\text{Kontinuitas: } \frac{dq}{dx} = q \text{ atau } q = Px + C_1 \quad \text{Integrasi: } h^2 = -\frac{P}{K} x^2 - \frac{2C_1}{K} x + C_2$$

$$\text{Kondisi batas kanan: } x = B_{\text{akuifer}}, h = h_{\text{kanan}}$$

$$\text{Kondisi batas kiri: } x = 0, h = h_{\text{kiri}}$$

$$h_{\text{kanan}}^2 = -\frac{P}{K} B_{\text{akuifer}}^2 - \frac{2C_1}{K} B_{\text{akuifer}} + C_2$$

$$h_{\text{kiri}}^2 = C_2 \dots (1)$$

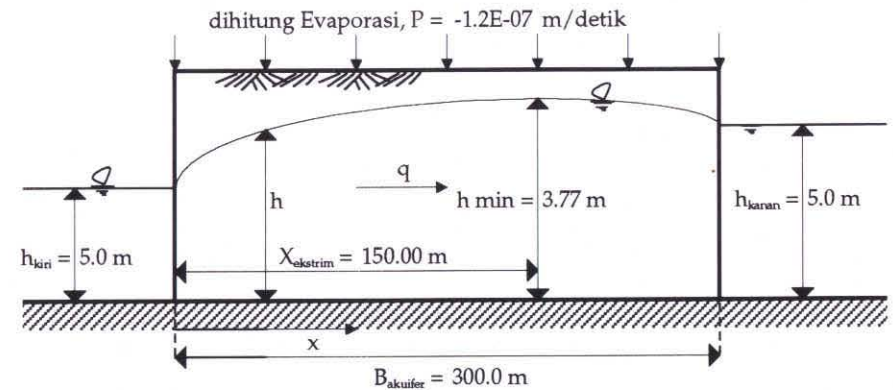
$$0.5 \cdot (h_{\text{kiri}}^2 - h_{\text{kanan}}^2) \frac{K}{B_{\text{akuifer}}} - 0.5 \cdot P B_{\text{akuifer}} = C_1 \dots (2)$$

Elevasi muka air ekstrim (maximum atau minimum) terjadi jika

$$q = Px + C_1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{C_1}{P}$$

$$\text{atau } h_{\text{ekstrim}}^2 = -\frac{C_1^2}{K P} + \frac{2C_1^2}{K P} + C_2 \Rightarrow h_{\text{ekstrim}}^2 = \frac{C_1^2}{K P} + C_2 \dots (3)$$

$$\text{sehingga } h_{\text{ekstrim}}^2 - C_2 = \frac{C_1^2}{K P} \Rightarrow P = \frac{C_1^2}{K (h_{\text{ekstrim}}^2 - C_2)} \dots (4)$$



Penyelesaian:

$$\bullet \bullet \text{ Dari Pers.(1): } C_2 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ m}^2.$$

$$\bullet \bullet \text{ Pers.(2) ditulis sebagai } C_1 = A + B \cdot P \dots (5)$$

$$\text{dengan: } A = 0.5 \cdot (5^2 - 5^2) \cdot 0.00025 / 300 = 0$$

$$B = 0.5 \cdot 300 = -150$$

$$\bullet \bullet \text{ Dari Pers.(5): } C_1 = 0 + (-150) \cdot (-0.00000012) = 1.80 \times 10^{-5}$$

$$\bullet \bullet \text{ Elevasi muka air minimum dapat dihitung dari Pers.(4) sbb:}$$

$$h^2 = 0.000018^2 / 0.00025 / -0.00000012 + (25) = 14.2$$

$$h = \sqrt{14.2} = 3.768 \text{ m}$$

$$\bullet \bullet \text{ Nilai X minimum dapat dihitung sebagai } X = -C_1 / P$$

$$X = -(1.80 \times 10^{-5}) / (-1.20 \times 10^{-7}) = 150.000 \text{ m}$$

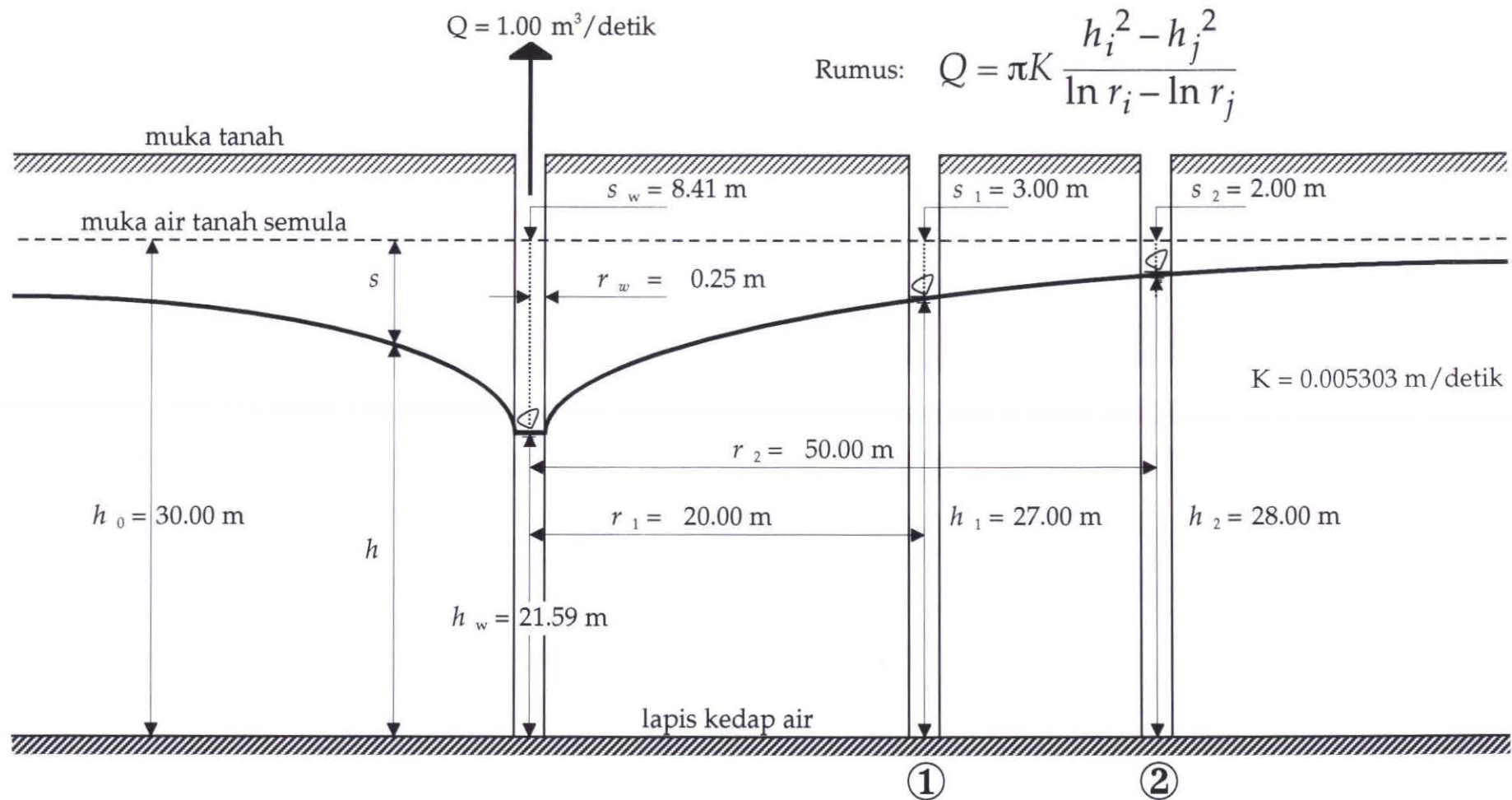
Soal Sumur Nirtekan Tunak

Sebuah sumur dalam A mempunyai jari-jari 0.25 m menembus suatu akuifer seragam nirtekan dan mencapai lapisan kedap air yang terletak 30.00 m dibawah elevasi muka air tanah.

Setelah diadakan pemompaan dengan debit konstan sebesar 1.00 m³/detik, ternyata penurunan elevasi muka air tanah dalam keadaan tunak pada sumur-sumur yang berjarak 20.00 m dan 50.00 m dari sumur A masing-masing adalah 3.00 m dan 2.00 m.

Pertanyaan:

1. Hitung nilai konduktivitas hidraulis dari akuifer!
2. Berapa penurunan muka air yang terjadi pada sumur artesis A?
3. Jika sumur anda berjarak 150.00 m dari sumur A berapa penurunan muka air yang terjadi?



Jawaban Soal Sumur Nirtakan Tunak

Rumus:

$$Q = \pi K \frac{h_2^2 - h_1^2}{\ln r_2 - \ln r_1} \text{ atau } K = \frac{Q}{\pi} \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{h_2^2 - h_1^2}$$

Diketahui:

$r_w =$	0.25 m	$r_1 =$	20.00 m	$r_2 =$	50.00 m
$h_0 =$	30.00 m	$s_1 =$	3.00 m	$s_2 =$	2.00 m
$Q =$	1.00 m ³ /detik	$r =$	150.00 m (sumur tinjauan)		

Dihitung:

$$h_1 = h_0 - s_1 = 27.00 \text{ m } (= 30.00 \text{ m} - 3.00 \text{ m})$$

$$h_2 = h_0 - s_2 = 28.00 \text{ m } (= 30.00 \text{ m} - 2.00 \text{ m})$$

a. Konduktivitas hidraulis:

$$K = (1.00/\pi) \cdot (\ln 50.00 - \ln 20.00) / (28.00^2 - 27.00^2) = 0.005303 \text{ m/detik } (= 458.18 \text{ m/hari})$$

b. Tinggi air di sumur pompa:

$$h_w^2 = (1.00/\pi/0.005303) \cdot (\ln 0.25 - \ln 20.00) + 27.00^2 = 465.9705 \text{ m}^2$$

$$h_w = 21.5864 \text{ m}$$

Penurunan muka air di sumur pompa:

$$\begin{aligned} s_w &= h_0 - h_w \\ &= 30.00 \text{ m} - 21.59 \text{ m} = 8.414 \text{ m} \end{aligned}$$

c. Tinggi air di sumur dengan jarak, $r = 150.00 \text{ m}$ dari sumur pompa

$$h_r^2 = (1.00/\pi/0.005303) \cdot (\ln 150.00 - \ln 20.00) + 27.00^2 = 849.9438 \text{ m}^2$$

$$h_r = 29.1538 \text{ m}$$

Penurunan muka air di sumur dengan jarak, $r = 150.00 \text{ m}$ dari sumur pompa

$$\begin{aligned} s_r &= h_0 - h_r \\ &= 30.00 \text{ m} - 29.15 \text{ m} = 0.846 \text{ m} \end{aligned}$$

Soal Mengenai Sumur

Sebuah sumur menembus aquifer tertekan dipompa dengan debit konstan 1306 m³/hari. Selama waktu pemompaan ini, pada sebuah sumur pengamatan yang berjarak 60 m dari sumur pompa diamati penurunan muka airnya.

Penurunan muka air di sumur pengamatan disajikan dalam tabel disamping ini. Hitung nilai transmissivitas (T) dan koefisien tampungan (S) dari aquifer dengan metoda Theis.

Jawaban Soal Mengenai Sumur Dengan Metoda Theis

Diketahui:

$$Q = 1306.00 \text{ m}^3/\text{hari}$$

$$r = 60.00 \text{ m}$$

$$\Delta s = 0.465$$

$$\Delta r_i = 1.00\text{E}+06$$

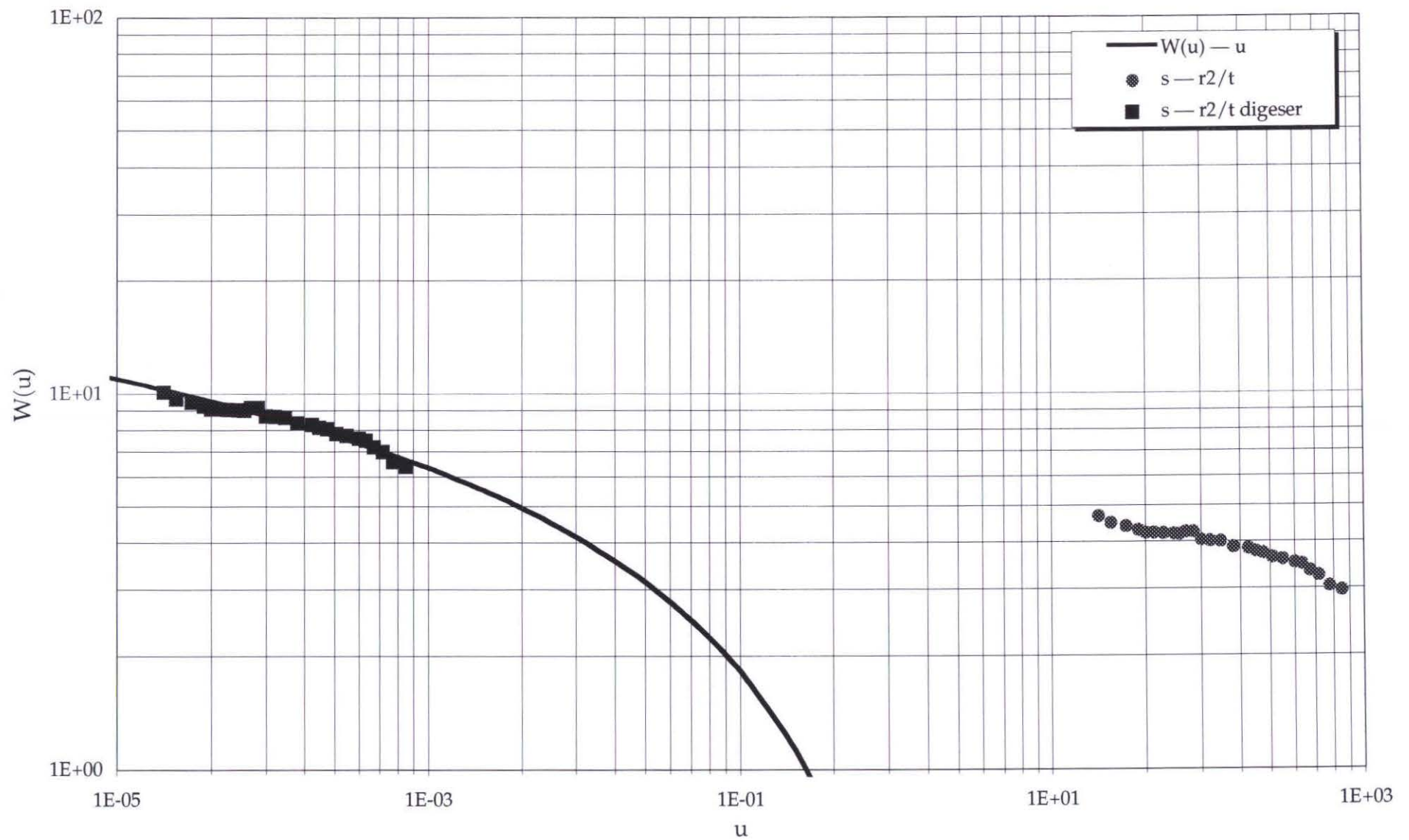
Dicoba nilai Δs dan Δr_i sedemikian rupa sehingga selisih dua kurva menjadi minimum.

Data		Hitungan awal
t (menit)	s (m)	$r^2/t \text{ (m}^2/\text{menit)}$
0.00	0.000	∞
5.00	2.968	720.00
6.00	3.050	600.00
7.00	3.250	514.29
8.00	3.345	450.00
9.00	3.486	400.00
10.00	3.521	360.00
12.00	3.592	300.00
14.00	3.627	257.14
16.00	3.733	225.00
18.00	3.768	200.00
20.00	3.836	180.00
25.00	3.873	144.00
30.00	4.014	120.00
35.00	4.030	102.86
40.00	4.043	90.00
45.00	4.261	80.00
50.00	4.261	72.00
55.00	4.190	65.45
60.00	4.202	60.00
70.00	4.214	51.43
80.00	4.226	45.00
90.00	4.226	40.00
100.00	4.300	36.00
120.00	4.402	30.00
150.00	4.500	24.00
180.00	4.683	20.00

Mencari posisi kedua kurva dengan geser salib sumbu			
$u = r^2/t/\Delta r_i$	$s/\Delta s$	$W(u)$	$ W(u) - s/\Delta s $
∞	0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.000720	6.3827957	6.6597792	0.2769835
0.000600	6.5591398	6.8419808	0.2828410
0.000514	6.9892473	6.9960458	0.0067985
0.000450	7.1935484	7.1295129	0.0640355
0.000400	7.4967742	7.2472460	0.2495282
0.000360	7.5720430	7.3525665	0.2194765
0.000300	7.7247312	7.5348281	0.1899031
0.000257	7.8000000	7.6889359	0.1110641
0.000225	8.0279570	7.8224351	0.2055218
0.000200	8.1032258	7.9401932	0.1630326
0.000180	8.2494624	8.0455337	0.2039287
0.000144	8.3290323	8.2686413	0.0603910
0.000120	8.6322581	8.4509388	0.1813193
0.000103	8.6666667	8.6050723	0.0615943
0.000090	8.6946237	8.7385909	0.0439672
0.000080	9.1634409	8.8563639	0.3070769
0.000072	9.1634409	8.9617164	0.2017244
0.000065	9.0107527	9.0570201	0.0462674
0.000060	9.0365591	9.1440260	0.1074669
0.000051	9.0623656	9.2981681	0.2358025
0.000045	9.0881720	9.4316931	0.3435210
0.000040	9.0881720	9.5494711	0.4612991
0.000036	9.2473118	9.6548276	0.4075158
0.000030	9.4666667	9.8371432	0.3704765
0.000024	9.6774194	10.0602807	0.3828614
0.000020	10.0709677	10.2425983	0.1716305
Selisih dua kurva:		5.3560278	

Menghitung T dan S	
$T = Q \cdot W(u) / 4\pi s \text{ (m}^2/\text{hari)}$	$S = 4 \cdot (T \cdot 24 \cdot 60) \cdot u / (r^2/t)$
–	–
233.200377	0.0000006
233.139213	0.0000006
223.718859	0.0000006
221.511895	0.0000006
216.061744	0.0000006
217.023243	0.0000006
218.006946	0.0000006
220.319023	0.0000006
217.779649	0.0000006
219.004726	0.0000006
217.976449	0.0000006
221.880385	0.0000006
218.806313	0.0000006
221.913025	0.0000006
224.631666	0.0000006
216.011679	0.0000006
218.581286	0.0000006
224.649067	0.0000006
226.159438	0.0000006
229.316960	0.0000006
231.949521	0.0000006
234.845985	0.0000007
233.350847	0.0000006
232.248152	0.0000006
232.343699	0.0000006
227.310394	0.0000006
224.297713	0.0000006

- Jawaban: 1. berdasarkan nilai rerata, maka nilai transmisivitas, $T = 224 \text{ m}^2/\text{hari}$ dan koefisien tampungan, $S = 6.230\text{E}-07$
 2. berdasarkan kesesuaian titik, maka nilai transmisivitas, $T = 224 \text{ m}^2/\text{hari}$ dan koefisien tampungan, $S = 6.214\text{E}-07$



Soal Mengenai Sumur

Sebuah sumur menembus akuifer tertekan dipompa dengan debit konstan 2500.0 m³/hari. Selama waktu pemompaan ini, pada sebuah sumur pengamatan yang berjarak 60.00 m dari sumur pompa diamati penurunan muka airnya.

Penurunan muka air di sumur pengamatan disajikan dalam tabel disamping ini. Hitung nilai transmissivitas (T) dan koefisien tampungan (S) dari akuifer dengan metoda Cooper-Jacob.

Jawaban Soal Mengenai Sumur Dengan Metoda Cooper-Jacob

Diketahui:

$$Q = 2500.0 \text{ m}^3/\text{hari}$$

$$r = 60.0 \text{ m}$$

$$\text{Persamaan garis data: } s = 0.3922 \cdot \log t + 0.1833$$

$$\text{Pada saat } s = 0, t = t_0, \text{ sehingga } 0 = 0.3922 \cdot \log t_0 + 0.1833$$

$$\text{Jadi } \log t_0 = -0.1833/0.3922 = -0.4672, \text{ sehingga } t_0 = 10^{-0.4672}$$

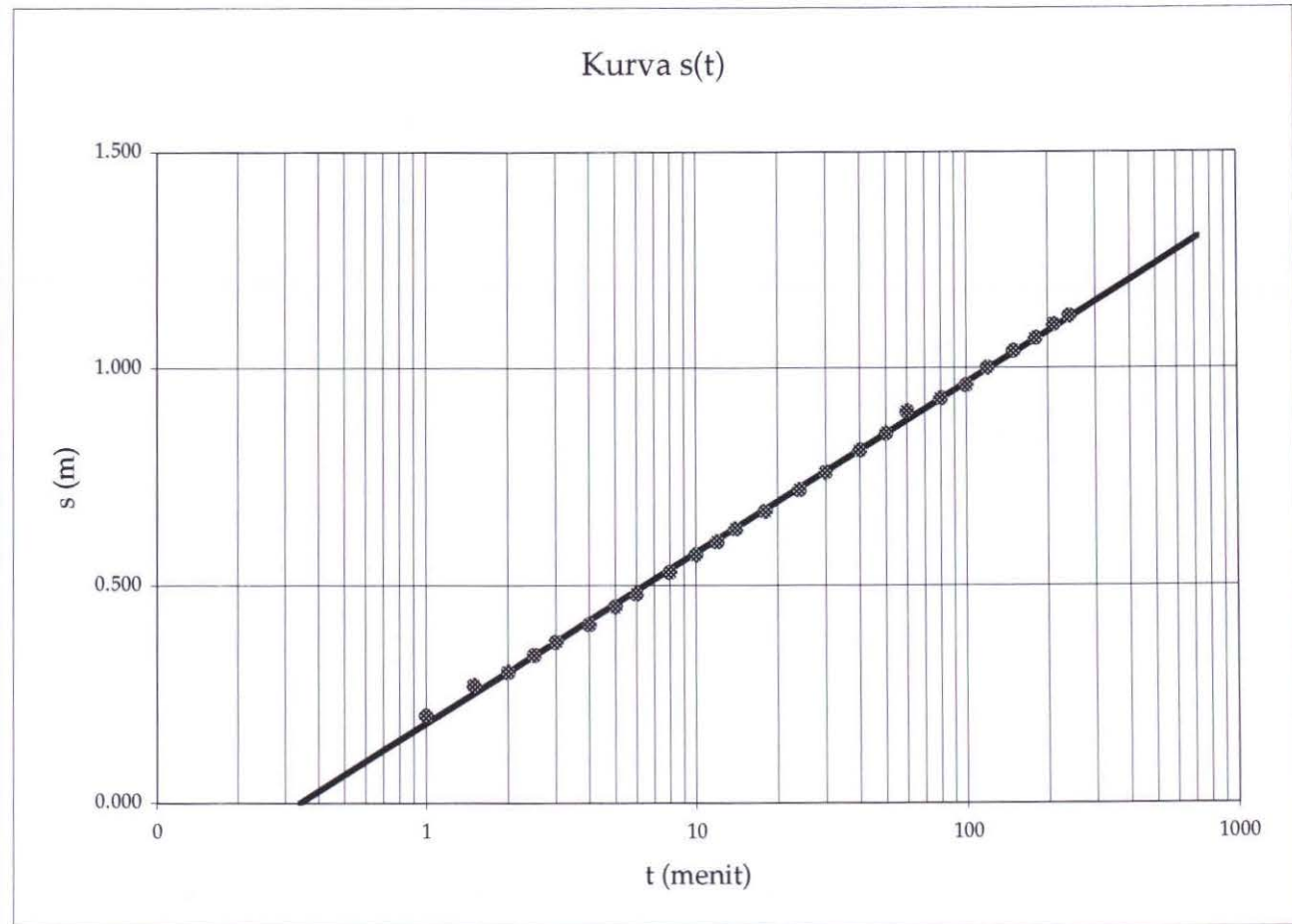
$$t_0 = 0.3410 \text{ menit}$$

$$\Delta s = 0.3922 \text{ m}$$

$$T = 2.30 \cdot Q / (4\pi \Delta s) = 2.30 \cdot 2500.00 / (4\pi \cdot 0.3922) = 1166.66 \text{ m}^2/\text{hari}$$

$$s = 2.25 \cdot T \cdot t_0 / r^2 = 2.25 \cdot [1167 / (24 \cdot 60)] \cdot 0.341 / 60.0^2 = 1.73\text{E-}04$$

Data		Hitungan
t (menit)	s (m)	log t
0.00	0.000	—
1.00	0.200	0.00000
1.50	0.270	0.17609
2.00	0.300	0.30103
2.50	0.340	0.39794
3.00	0.370	0.47712
4.00	0.410	0.60206
5.00	0.450	0.69897
6.00	0.480	0.77815
8.00	0.530	0.90309
10.00	0.570	1.00000
12.00	0.600	1.07918
14.00	0.630	1.14613
18.00	0.670	1.25527
24.00	0.720	1.38021
30.00	0.760	1.47712
40.00	0.810	1.60206
50.00	0.850	1.69897
60.00	0.900	1.77815
80.00	0.930	1.90309
100.00	0.960	2.00000
120.00	1.000	2.07918
150.00	1.040	2.17609
180.00	1.070	2.25527
210.00	1.100	2.32222
240.00	1.120	2.38021
Arah garis, m = 0.39220440		
Titik potong, b = 0.18325526		



Soal Mengenai Recovery Sumur

Sebuah sumur menembus aquifer tertekan dipompa dengan debit konstan 2500.0 m³/hari, selama 240.00 menit. Setelah itu pemompaan dihentikan dan pada sebuah sumur pengamatan yang berjarak 60.00 m dari sumur pompa diamati penurunan muka airnya.

Penurunan muka air di sumur pengamatan disajikan dalam tabel disamping ini. Hitung nilai transmissivitas (T) dengan metoda Cooper-Jacob.

Jawaban Soal Mengenai Recovery Sumur Dengan Metoda Cooper-Jacob

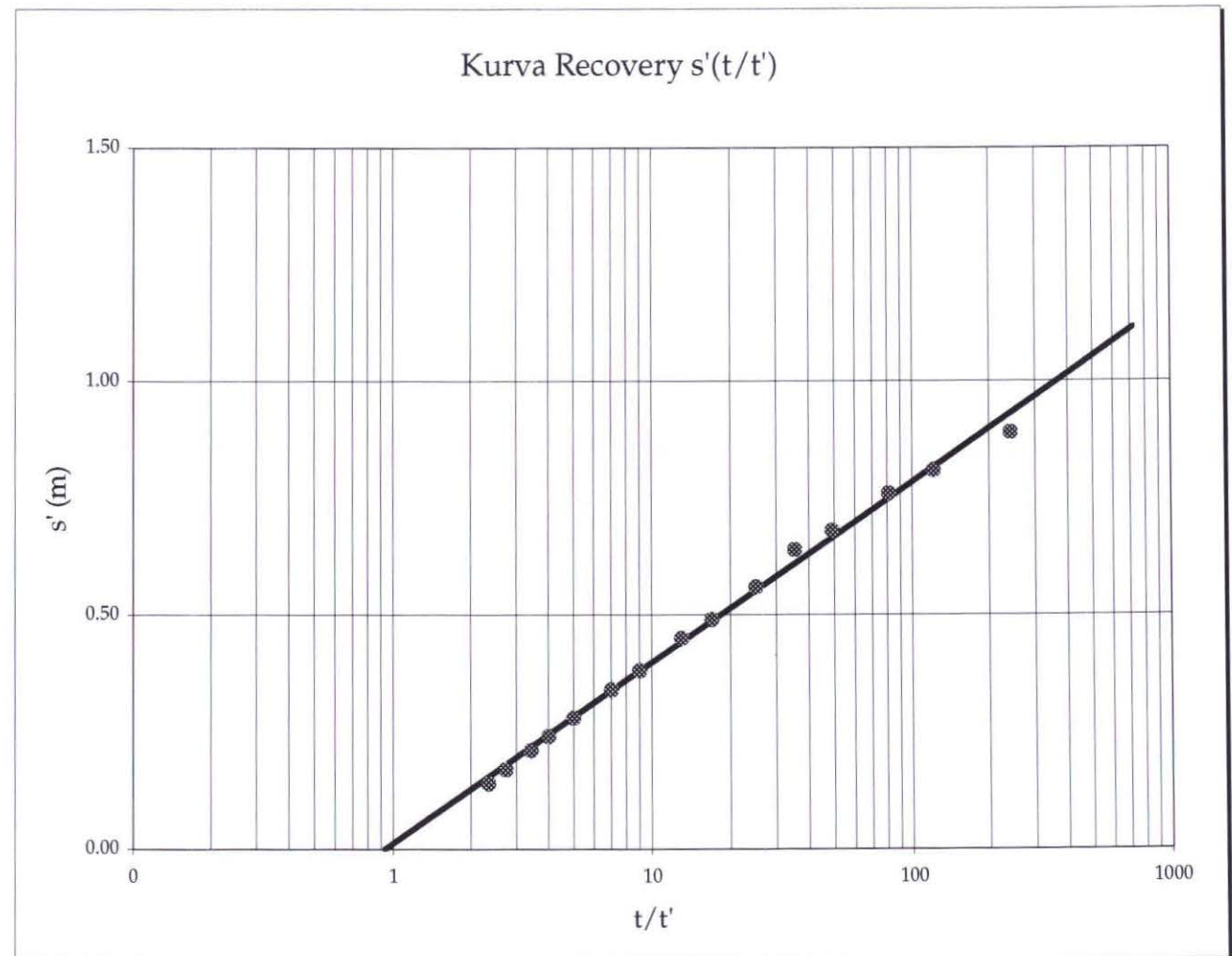
Diketahui:

$$Q = 2500.0 \text{ m}^3/\text{hari}$$

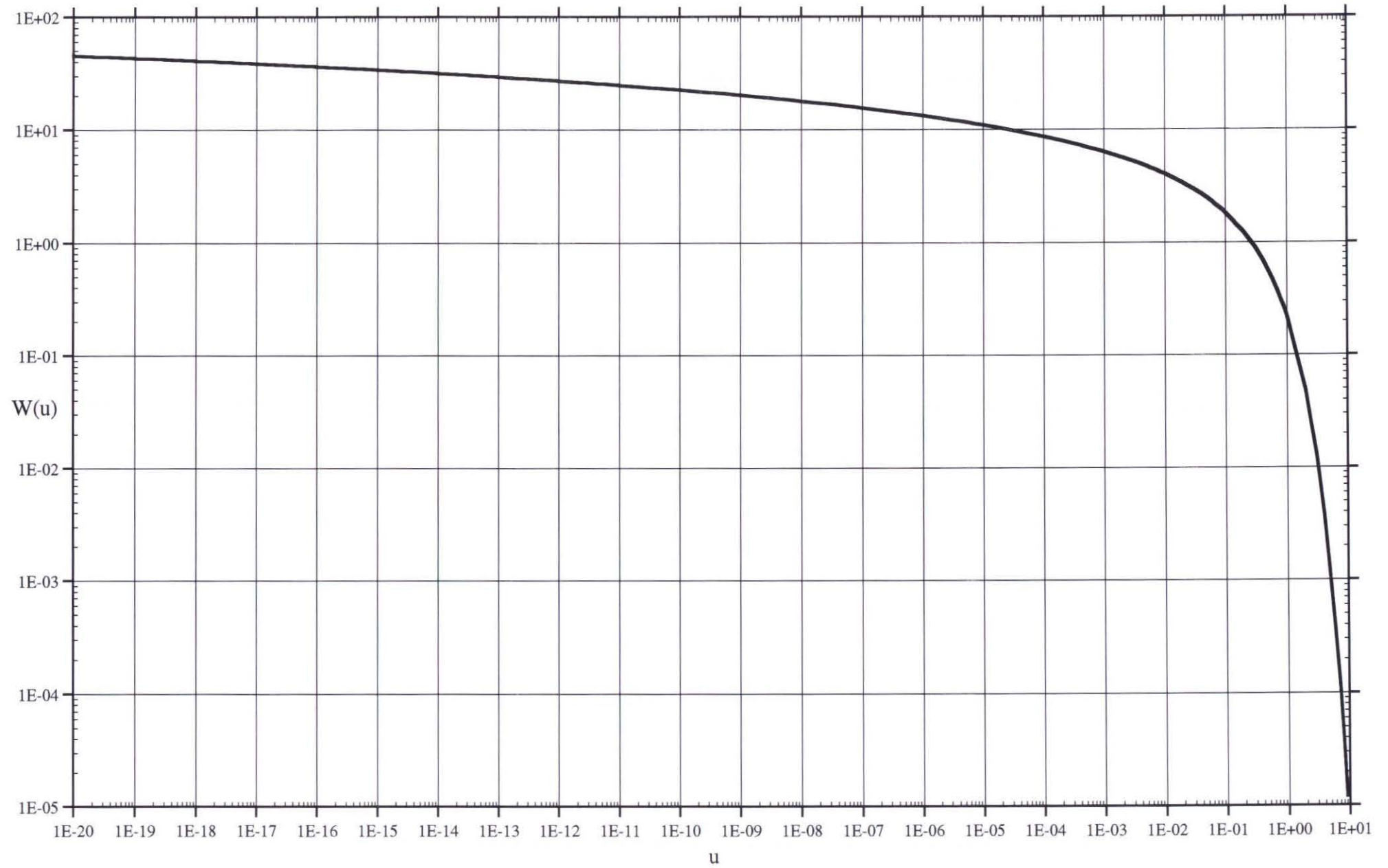
$$r = 60.0 \text{ m}$$

$$\text{Waktu henti, } t_h = 240.0 \text{ menit}$$

Data		Hitungan	
t (menit)	s' (m)	t/t'	log (t/t')
241.00	0.89	241.00	2.38202
242.00	0.81	121.00	2.08279
243.00	0.76	81.00	1.90849
245.00	0.68	49.00	1.69020
247.00	0.64	35.29	1.54760
250.00	0.56	25.00	1.39794
255.00	0.49	17.00	1.23045
260.00	0.45	13.00	1.11394
270.00	0.38	9.00	0.95424
280.00	0.34	7.00	0.84510
300.00	0.28	5.00	0.69897
320.00	0.24	4.00	0.60206
340.00	0.21	3.40	0.53148
380.00	0.17	2.71	0.43366
420.00	0.14	2.33	0.36798
Arah garis, m = 0.38594039			
Titik potong, b = 0.011687884			
$T = 2.30 \cdot Q / (4\pi \Delta s')$ $= 2.30 \cdot 2500.00 / (4\pi \cdot 0.385940)$ $= 1185.60 \text{ m}^2/\text{hari}$			

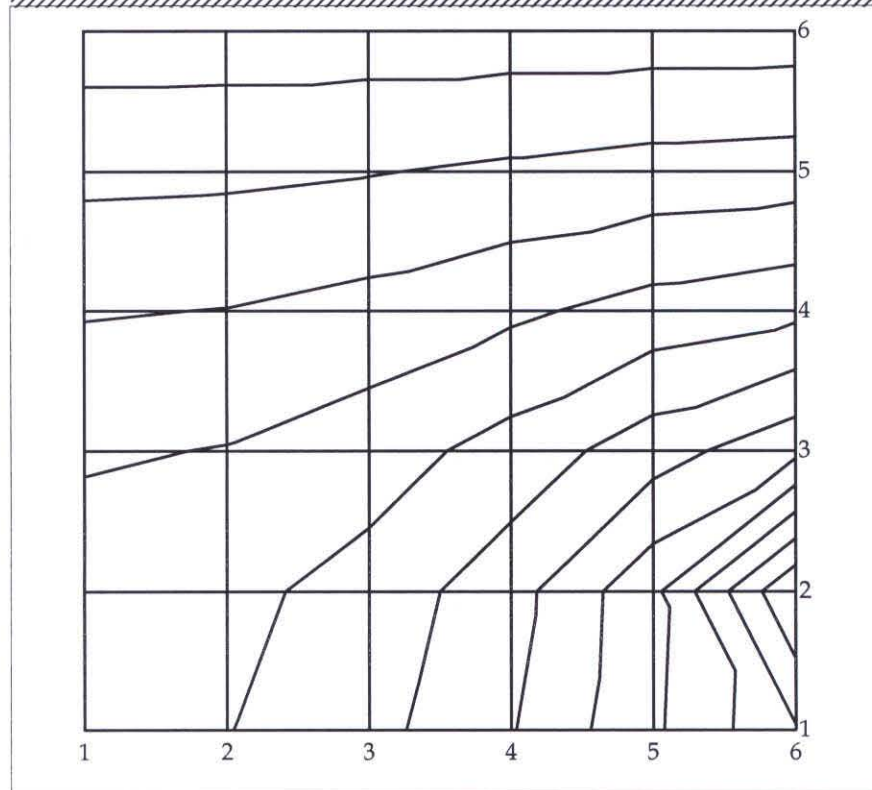


FUNGSI SUMUR $W(u)$

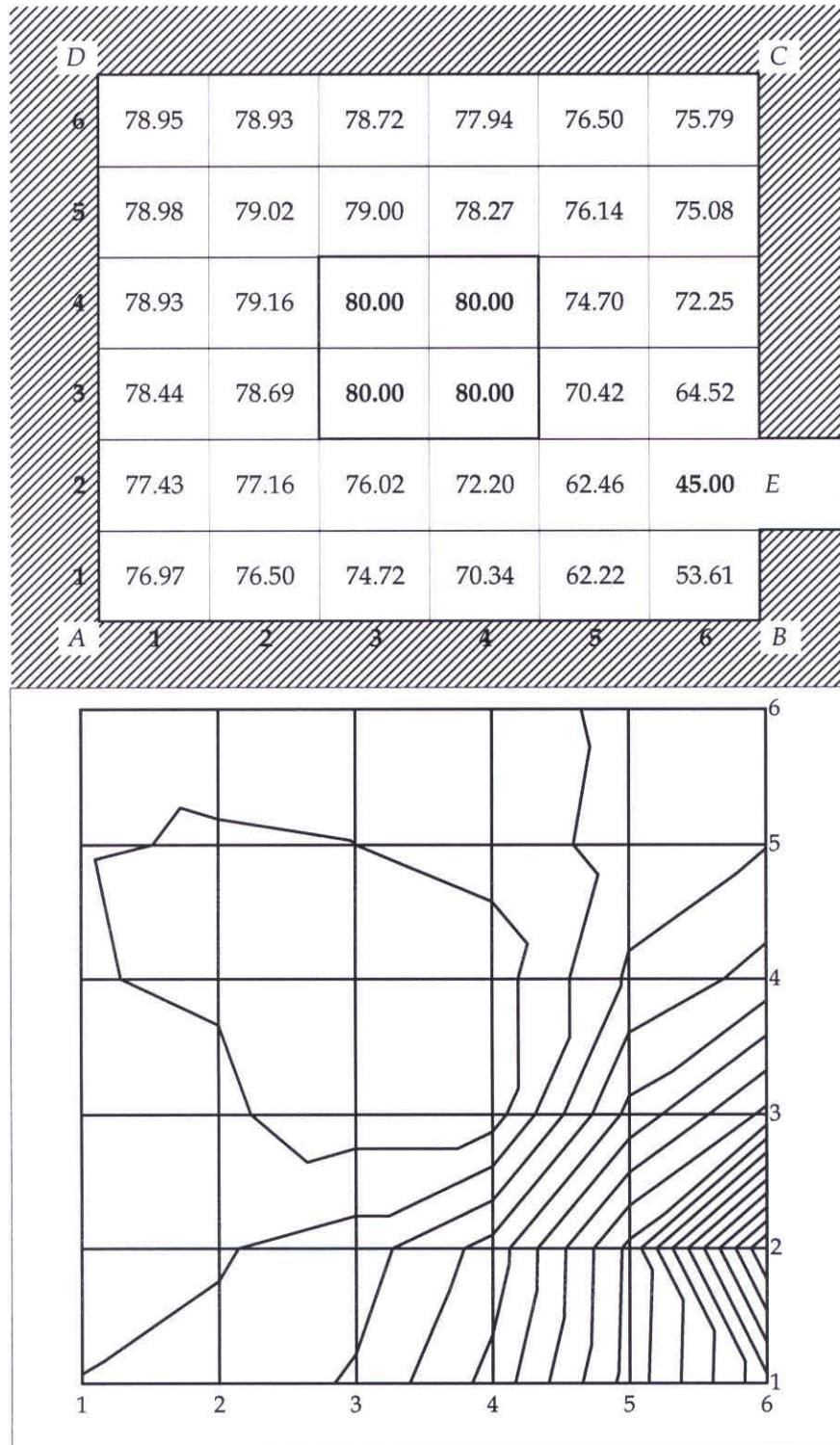


$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

D	6	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	100.00	C
	5	97.48	97.38	97.10	96.68	96.23	96.00	
	4	95.15	94.95	94.34	93.38	92.26	91.52	
	3	93.23	92.91	91.93	90.25	87.90	85.58	
	2	91.96	91.54	90.23	87.78	83.50	75.00	
	1	91.51	91.06	89.66	87.14	83.32	79.16	
A		1	2	3	4	5	6	B

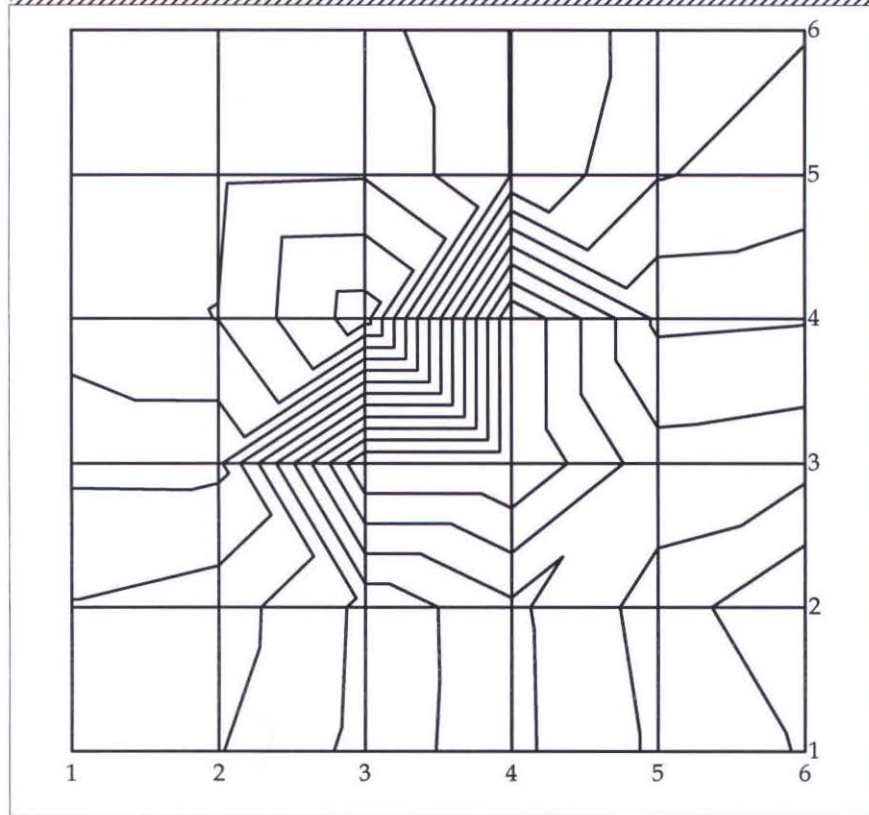


$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$



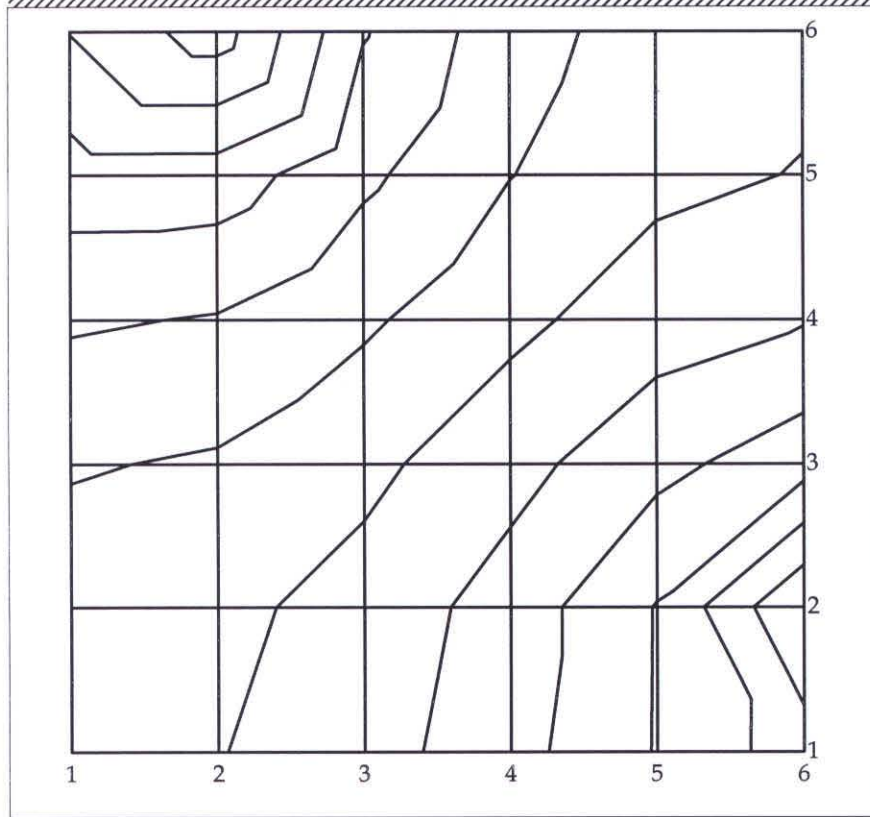
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

D							C
6	94.41	94.38	93.75	90.94	88.07	87.10	
5	94.44	94.68	94.85	90.96	87.13	86.13	
4	93.99	95.04	100.00		83.41	83.15	
3	91.45	91.48			80.21	79.64	
2	88.85	87.99	84.57	81.42	78.16	75.00 E	
1	87.98	87.10	84.43	81.48	78.66	76.83	
A	1	2	3	4	5	6	B



$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

D							C
6	97.06	100.00	93.17	89.85	88.09	87.50	
5	94.13	94.10	91.41	89.06	87.50	86.91	
4	91.25	90.86	89.32	87.50	85.94	85.15	
3	89.17	88.76	87.50	85.68	83.59	81.83	
2	87.92	87.50	86.24	84.14	80.90	75.00	E
1	87.50	87.08	85.83	83.75	80.87	77.94	
A	1	2	3	4	5	6	B



$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

