REGRESI KUADRAT TERKECIL UNTUK KALIBRASI BANGUNAN UKUR DEBIT

oleh
Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.
Oktober 1992

Penjelasan Cara Regresi
Untuk Aplikasi di Lapangan

PRAKATA

Buku kecil yang berjudul "Regresi Kuadrat Terkecil Untuk Kalibrasi Bangunan Ukur Debit" ini berisikan penjelasan singkat mengenai cara regresi untuk bangunan ukur debit. Buku ini tidak menjelaskan secara rinci teori-teori statistik yang mendukung analisis regresi, karena di luar lingkup dari buku ini. Pembaca yang ingin mengetahui analisis regresi diharapkan mencari dari acuan-acuan di luar buku ini.

Buku ini lebih merupakan petunjuk praktis bagi mahasiswa S1 maupun praktisi di lapangan. Dalam buku ini prinsip umum regresi dijelaskan secara singkat, kemudian aplikasinya untuk bangunan ukur debit dijelaskan. Walaupun penjelasannya hanya untuk bangunan ukur debit, namun konsep regresi ini dapat digunakan untuk setiap permasalahan di lapangan, asalkan variabel tak bebasnya masih tunggal.

Semoga buku kecil ini berguna, kritik membangun sangatlah diharapkan.

Yogyakarta, Oktober 1992

Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.
Penyusun

DAFTAR ISI

halaman

DAFTAR GAMBAR

halaman

1. TINJAUAN UMUM REGRESI

1.1. PENDAHULUAN

Dalam kalibrasi suatu bangunan ukur debit akan dilakukan pengukuran elevasi muka air dan debit yang melewati bangunan tersebut sebagai data primer. Dari data primer yang terkumpul akan dilakukan suatu analisis korelasi antara debit dengan elevasi muka air. Secara matematis terdapat banyak metoda untuk mendapatkan korelasi tersebut, misalnya metoda beda terbagi, polinomial interpolasi, polinomial minimum, dan polinomial kuadrat terkecil.

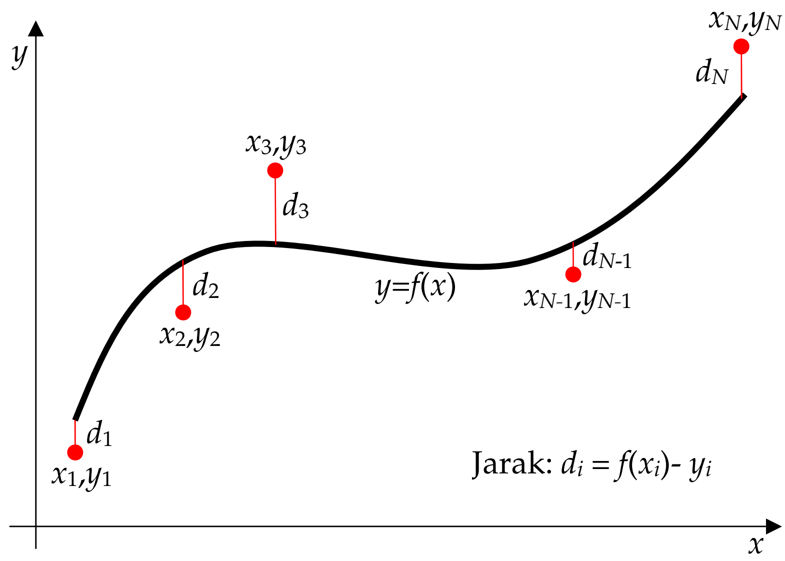
Di dalam suatu pekerjaan di lapangan, seperti kalibrasi bangunan ukur, pemakaian analisis korelasi seharusnya tidak murni dilakukan secara matematis. Analisis korelasi suatu kejadian dilapangan haruslah memperhatikan hukum-hukum fisika yang berlaku pada kejadian itu sendiri. Pada kasus bangunan ukur debit ambang lebar, secara fisika, hubungan antara debit dengan elevasi muka air mempunyai bentuk korelasi yang sudah tertentu. Analisis korelasi yang akan dilakukan haruslah mengacu pada bentuk tersebut.

Di bawah ini akan dijelaskan secara rinci cara analisis korelasi bangunan ukur debit ambang lebar dengan menggunakan polinomial kuadrat terkecil yang sesuai dengan hukum fisika yang mengaturnya. Selanjutnya istilah *metoda korelasi menggunakan polinomial kuadrat terkecil* akan diganti istilah *regresi kuadrat terkecil*.

1.2. REGRESI KUADRAT TERKECIL

Pada prinsipnya analisis regresi adalah pencarian suatu kurva yang mewakili hubungan satu set data. Regresi kuadrat terkecil adalah suatu regresi dengan konstrainnya adalah jumlah kuadrat jarak vertikal setiap titik dalam data terhadap kurva regresi menjadi minimum.

Dalam Gambar 1.1 disajikan satu set data hasil pengukuran (x_i, y_i) untuk $i = 1, 2, \ldots, N$, dengan N adalah jumlah data atau jumlah pengukuran. Dalam Gambar 1.1 disajikan pula kurva sembarang $y = f(x)$ yang menggambarkan korelasi teoretis antara x dengan y. Dalam kalibrasi bangunan ukur dapat dibayangkan bahwa y mewakili debit dan x mewakili elevasi muka air.



Gambar 1.1. Kurva regresi $y = f(x)$ beserta data yang diwakilinya

Definisi: *Dari semua kurva pendekatan terhadap satu set data, kurva yang mempunyai sifat bahwa nilai* $d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_N^2$ *adalah minimum, disebut dengan kurva terbaik yang mewakili data.*

Kurva yang mempunyai sifat itu disebut dengan kurva kuadrat terkecil. Kurva itu sendiri secara teoretis dapat berupa garis lurus parabola, atau polinomial berderajad tinggi maupun kurva-kurva jenis yang lain. Jadi analisis regresi tidak memberikan petunjuk kurva jenis yang mana yang harus dipakai, tetapi analisis ini memberikan, untuk satu jenis kurva (misalnya garis lurus), yang terbaik mewakili data.

1.3. REGRESI KURVA SEMBARANG

Untuk mengenalkan konsep analisis regresi kuadrat terkecil akan diawali dengan analisis regresi kurva sembarang. Pada kasus ini diandaikan terdapat satu set data pengukuran (x_1,y_1), (x_2,y_2), …, (x_N,y_N) yang akan diwakili dengan kurva sembarang

$$y = f(a_j,x) \tag{1.1}$$

dengan a_j (j = 1,2, …, m) adalah parameter-parameter fungsi f yang akan dihitung dengan metoda kuadrat terkecil.

Pertama kali adalah dihitung jarak vertikal setiap datum dengan kurva sembarang di atas

$$d_i = f(a_j,x_i) - y_i \tag{1.2}$$

Dalam Pers.(1.2) harus diingat bahwa (x_i, y_i) telah diketahui dari data pengukuran. Jika disyaratkan agar $\Delta = d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + ... + d_N^{\,2}$ harus minimum, maka syarat itu mempunyai makna bahwa

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a_j} = \frac{\partial}{\partial a_j}\sum_{i=1}^{N} d_i^{\,2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial d_i^{\,2}}{\partial a_j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial d_i^{\,2}}{\partial a_j} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} 2d_i\frac{\partial d_i}{\partial a_j} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} d_i\frac{\partial d_i}{\partial a_j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{ f(a_j,x_i) - y_i \right\}\frac{\partial\left\{ f(a_j,x_i) - y_i \right\}}{\partial a_j} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{ f(a_j,x_i) - y_i \right\}\left\{\frac{\partial f(a_j,x_i)}{\partial a_j} - \frac{\partial y_i}{\partial a_j}\right\} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}\left\{ f(a_j,x_i) - y_i \right\}\frac{\partial f(a_j,x_i)}{\partial a_j} = 0$$

atau
$$\sum_{i=1}^{N} y_i\frac{\partial f(a_j,x_i)}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^{N} f(a_j,x_i)\frac{\partial f(a_j,x_i)}{\partial a_j} \tag{1.3}$$

Pers.(1.3) harus diderivasikan ke setiap a_j yang terdapat pada kurva f. Selain itu Pers.(1.3) mudah diingat karena terdapat pola yang khas yaitu bila $\frac{\partial f(a_j, x_i)}{\partial a_j}$ dan tanda penjumlahan Σ dihilangkan, maka persamaan ini menjadi kembali ke persamaan asli kurva regresi yang sedang kita cari yaitu Pers.(1.1) $y = f(a_j, x)$. Oleh karena itu persamaan kerja untuk analisis regresi, Pers.(1.3), sangat mudah untuk diingat-ingat. Hal ini akan dijelaskan lebih rinci dengan contoh pada subbab selanjutnya.

1.4. REGRESI GARIS LURUS

Pada kasus ini diandaikan terdapat satu set data pengukuran (x_1,y_1), (x_2,y_2), …, (x_N,y_N) yang akan diwakili dengan garis lurus

$$y = a + bx \tag{1.4}$$

dengan a dan b adalah parameter yang akan dihitung dengan metoda kuadrat terkecil.

Pertama kali adalah dihitung jarak vertikal setiap datum dengan garis lurus di atas

$$d_i = a + bx_i - y_i \tag{1.5}$$

Dalam Pers.(1.5) harus diingat bahwa (x_i, y_i) telah diketahui dari data pengukuran. Jika disyaratkan agar $\Delta = d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + \ldots + d_N^{\,2}$ harus minimum, maka syarat itu mempunyai makna bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial a} &= \frac{\partial}{\partial a}\left(d_1^{\,2} + d_2^{\,2} + \ldots + d_N^{\,2}\right) = 0 \\ &= 2\left(d_1 + d_2 + \ldots + d_N\right) = 0 \\ &= 2\sum_{i=1}^{N}\left(a + bx_i - y_i\right) = 0 \end{aligned}$$

atau
$$aN + b\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Delta}{\partial b} &= \frac{\partial}{\partial b}\left(d_1^{\;2} + d_2^{\;2} + \ldots + d_N^{\;2}\right) = 0 \\ &= 2\left(d_1 x_1 + d_2 x_2 + \ldots + d_N x_N\right) = 0 \\ &= 2\sum_{i=1}^{N}\left(a x_i + b x_i^{\;2} - x_i y_i\right) = 0\end{aligned}$$

atau
$$a\sum_{i=1}^{N} x_i + b\sum_{i=1}^{N} x_i^{\;2} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \tag{1.7}$$

Dalam bentuk matrik Pers.(1.6) dan (1.7) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^{\;2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{Bmatrix} \tag{1.8}$$

Dari Pers.(1.8) dapat dihitung nilai parameter *a* dan *b*, yang dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} a &= \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{\;2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right)}{N\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{\;2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \\ b &= \frac{N\left(\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{N\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{\;2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Setelah parameter *a* dan *b* dihitung berdasarkan Pers.(1.9), maka persamaan regresi garis lurus seperti tercantum dalam Pers.(1.4) dapat ditentukan.

Pers.(1.6)-(1.8) lebih mudah diingat daripada Pers.(1.9), karena Pers.(1.6)-(1.8) dapat dijabarkan dengan mudah dari Pers. (1.4) sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\text{Pers.(1.1)}\times\text{Koefisien dari } a\right)$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\left(y = a + bx\right)\times 1 \tag{1.10}$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} y_i = aN + b\sum_{i=1}^{N} x_i$$

dan

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\text{Pers.(1.1)}\times\text{Koefisien dari } b\right)$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\left(y = a + bx\right)\times x \tag{1.11}$$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{N} x_i + b\sum_{i=1}^{N} x_i^{\ 2}$$

Pers.(1.10)-(1.11) tidak lain adalah Pers(1.6)-(1.8). Walaupun pendekatannya tidak ilmiah, agar lebih mudah mengingat, maka cara untuk mendapatkan Pers.(1.10)-(1.11) lebih dianjurkan dibanding dengan cara untuk menjabarkan Pers.(1.6)-(1.8). Untuk memahami prinsip regresi kuadrat terkecil penjabaran Pers.(1.6)-(1.8) harus dimengerti secara rinci, karena mempunyai dasar ilmiah.

1.5. REGRESI PARABOLIS

Sejalan dengan regresi garis lurus, maka regresi parabolis dapat pula dijabarkan dengan dua cara pemahaman di atas. Untuk kepentingan praktis maka dalam subbab ini akan dicantumkan hasilnya saja. Persamaan regresi parabola mempunyai bentuk:

$$y = a + bx + cx^2 \tag{1.12}$$

dengan a, b, dan c adalah konstanta yang nilainya dapat dihitung dengan menyelesaikan tiga sistem persamaan linier yang didapat dari analogi pada regresi garis lurus, Pers. (1.10)-(1.11), sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} y_i &= aN + b\sum_{i=1}^{N} x_i + c\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} \\
\sum_{i=1}^{N} x_i y_i &= a\sum_{i=1}^{N} x_i + b\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} + c\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,3} \\
\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} y_i &= a\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} + b\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,3} + c\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,4}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

jika diselesaikan akan menghasilkan koefisien sebagai berikut:

$$a = \frac{(Sx2y)(D1) - (Sxy)(D2) + (Sy)(D3)}{D7}$$

$$b = \frac{(Sx2)(D4) - (Sy)(D2) + (N)(D5)}{D7}$$

$$c = \frac{(Sy)(D1) - (Sx)(D4) - (N)(D6)}{D7} \tag{1.14}$$

dengan

$$\begin{aligned}
D1 &= (Sx2)^2 - (Sx)(Sx3) \\
D2 &= (Sx2)(Sx3) - (Sx)(Sx4) \\
D3 &= (Sx3)^2 - (Sx2)(Sx4) \\
D4 &= (Sx2)(Sxy) - (Sx)(Sx2y) \\
D5 &= (Sx2y)(Sx3) - (Sx4)(Sxy) \\
D6 &= (Sx2)(Sx2y) - (Sx3)(Sxy) \\
D7 &= (Sx2)(D1) - (Sx)(D2) + (N)(D3)
\end{aligned} \tag{1.15}$$

sedangkan

$$\begin{aligned}
Sx &= \sum_{i=1}^{N} x_i \ \text{ dan } \ Sxm = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\,m}, \quad m = 2,3,4 \\
Sy &= \sum_{i=1}^{N} y_i \ \text{ dan } \ Sym = \sum_{i=1}^{N} y_i^{\,m}, \quad m = 2,3,4 \\
Sxy &= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \ \text{ dan } \ Sx2y = \sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} y_i
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Dalam bentuk matriks Pers.(1.13)-(1.16)

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} 1 & \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^3 \\ \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^3 & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 y_i \end{Bmatrix} \tag{1.17}$$

1.6. REGRESI POLINOMIAL

Untuk polinomial derajad tiga atau lebih persamaan kurvanya adalah

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \tag{1.18}$$

dengan m adalah derajad polinomialnya dan a_i untuk $i = 0$ s/d m adalah konstanta yang dapat dihitung dengan cara yang sama seperti dijelaskan di atas. Secara umum a_i dapat dihitung dari sistem (m+1) persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned} a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{N} {x_i}^m &= \sum_{i=1}^{N} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{m+1} &= \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ &\vdots \\ a_0 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^m + a_1 \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{m+1} + \cdots + a_m \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{2m} &= \sum_{i=1}^{N} {x_i}^m y_i \end{aligned} \tag{1.19}$$

Dalam bentuk matriks Pers.(1.19)

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} 1 & \sum_{i=1}^{N} x_i & \cdots & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{m-1} & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^m \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^m & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{m-1} & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^m & \cdots & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{2m} & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{2m-1} \\ \sum_{i=1}^{N} {x_i}^m & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{2m-1} & \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{2m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} {x_i}^{m-1} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} {x_i}^m y_i \end{Bmatrix} \tag{1.20}$$

Penyelesaian (m+1) sistem persamaan linier, Pers.(1.19)-(1.20), tidak akan dijelaskan disini, karena di luar lingkup pembahasan buku praktis ini. Cara penyelesaian secara rinci dapat dilihat didalam buku-buku analisis numeris ataupun matrik.

1.7. REGRESI MULTI-VARIABEL

Konsep regresi garis lurus dan regresi polinomial dapat dikembangkan untuk mendapatkan regresi multi-variabel. Untuk kemudahan menerangkan konsepnya, maka dipakai contoh regresi dua variabel. Persamaan regresi dua variabel dapat ditulis dalam bentuk:

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 y \tag{1.21}$$

dengan a_0, a_1, dan a_2 adalah konstanta yang dicari. Konstanta ini dapat dihitung seperti metoda yang sebelumnya dipakai di atas; yaitu dengan menyelesaikan sistem tiga persamaan linier dibawah ini.

$$\begin{aligned} a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{N} y_i &= \sum_{i=1}^{N} z_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} + a_2 \sum_{i=1}^{N} x_i y_i &= \sum_{i=1}^{N} x_i z_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{N} y_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i y_i + a_2 \sum_{i=1}^{N} y_i^{\,2} &= \sum_{i=1}^{N} y_i z_i \end{aligned} \tag{1.22}$$

Dalam bentuk matriks Pers.(1.22)

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} 1 & \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} & \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i & \sum_{i=1}^{N} x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} y_i^{\,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{N} z_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i z_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i z_i \end{Bmatrix} \tag{1.23}$$

Untuk regresi multi-variabel penjabarannya adalah sejalan dengan penjabaran di atas, jadi tidak akan diulangi disini.

1.8. REGRESI DENGAN BENTUK TENTU

Ada beberapa bentuk kurva yang bentuknya, jika dialihragamkan akan menjadi bentuk-bentuk yang sudah dijelaskan diatas. Bentuk-bentuk kurva ini akan dijelaskan dibawah ini.

1.8.1. Kurva Exponensial

Kurva exponensial mempunyai bentuk $y = ae^{bx}$ yang dapat diubah menjadi $\ln(y) = \ln(a) + [\ln(e)]\bullet bx$, kemudian dapat ditulis menjadi:

$$Y = A + BX \qquad (1.24)$$

dengan $Y = \ln(y)$, $A = \ln(a)$, $B = b$, dan $X = x$. Pers.(1.24) jelas merupakan kurva linier.

1.8.2. Kurva Pangkat

Kurva pangkat mempunyai bentuk $y = ab^x$ yang dapat diubah menjadi $\ln(y) = \ln(a) + x\ \ln(b)$, kemudian dapat ditulis menjadi:

$$Y = A + BX \qquad (1.25)$$

dengan $Y = \ln(y)$, $A = \ln(a)$, $B = \ln(b)$, dan $X = x$. Pers.(1.25) jelas merupakan kurva linier.

1.8.3. Kurva Geometris

Kurva geometris mempunyai bentuk $y = ax^b$ yang dapat diubah menjadi $\ln(y) = \ln(a) + b\ \ln(x)$, kemudian dapat ditulis menjadi:

$$Y = A + BX \qquad (1.26)$$

dengan $Y = \ln(y)$, $A = \ln(a)$, $B = b$, dan $X = \ln(x)$. Pers.(1.26) jelas merupakan kurva linier.

1.8.4. Kurva Logaritmis

Kurva logaritmis mempunyai bentuk $y = a + b \ln(x)$ yang dapat ditulis menjadi:

$$Y = A + BX \tag{1.27}$$

dengan $Y = y$, $A = a$, $B = b$, dan $X = \ln(x)$. Pers.(1.27) jelas merupakan kurva linier pula.

Untuk kurva-kurva yang lain yang tidak dibahas disini, dapat diusahakan untuk diubah menjadi bentuk-bentuk yang sudah dibahas di atas, sehingga penyelesaiannya dapat dilakukan.

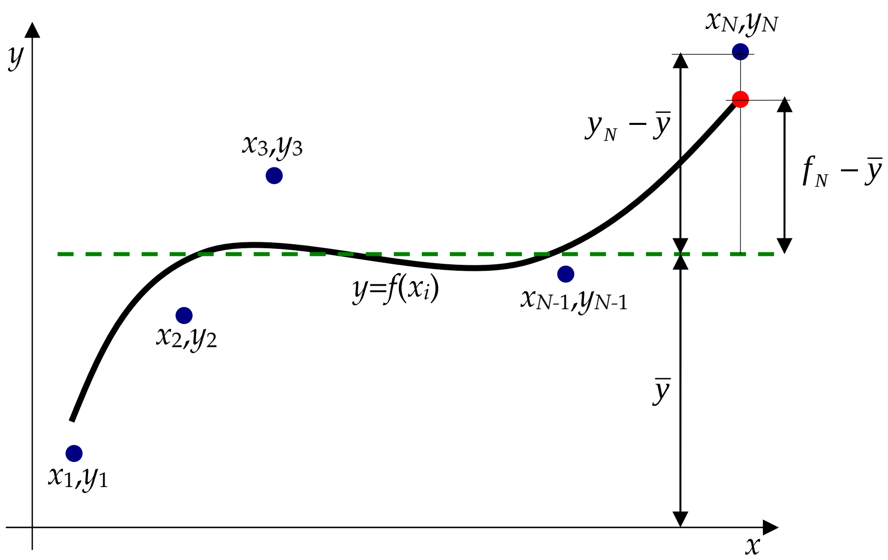
1.9. KOEFISIEN KORELASI

Dalam analisis regresi, tanpa mempertimbangkan korelasi fisika yang berlaku pada suatu data, secara matematis dapat dipilih kurva yang mana yang paling sesuai dengan data tersebut. Penentuan kurva yang paling mewakili data tersebut dapat diperoleh dengan menghitung nilai koefisien korelasi untuk setiap kurva regresi yang dicoba. Kurva yang memberikan nilai absolut koefisien korelasi paling tinggi merupakan kurva yang paling mewakili data yang dianalisis.

Koefisien korelasi, *r*, didefinisikan sebagai

$$r = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(f_i - \bar{y} \right)^2}{\sum_{i=1}^{N} \left(y_i - \bar{y} \right)^2}} \text{, dengan } \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} \tag{1.28}$$

dengan f_i adalah nilai kurva regresi pada titik i, y_i adalah nilai data pada titik i.



Gambar 1.2. Visualisasi konsep koefisien korelasi

1.9.1. Garis Lurus

Untuk kurva regresi garis lurus dengan persamaan $y = a + bx$, maka koefisien korelasinya dapat ditulis sebagai

$$r = \frac{N\sum_{i=1}^{N}(x_i y_i) - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{\sqrt{\left[N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right]\left[N\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2\right]}} \tag{1.29}$$

1.9.2. Kurva Parabolis

Untuk kurva regresi garis lurus dengan persamaan $y = a + bx + cx^2$, maka koefisien korelasinya dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{A - B - D}{(Sy)^2 - (N)(Sy2)}} \\ A &= \left[(Sx)(b) + (Sx2)(c)\right]^2 \\ B &= (N)(b)\left[(Sx2)(b) + (Sx3)(c)\right] \\ C &= (N)(c)\left[(Sx3)(b) + (Sx4)(c)\right] \end{aligned} \tag{1.30}$$

dengan simbol-simbol sama dengan Pers.(1.13)-(1.16).

1.9.3. Kurva Polinomial dan Multi-Variabel

Untuk kurva polinomial berderajad tiga keatas serta kurva multi-variabel koefisien korelasi, r, lebih mudah kalau dihitung langsung dengan Pers.(1.28).

2. REGRESI UNTUK BANGUNAN UKUR AMBANG LEBAR

Untuk bangunan ukur debit dimana formulasi debitnya sudah tertentu, analisis regresi harus dilakukan sesuai dengan formulasi itu. Untuk bentuk formulasi yang telah tentu, analisis regresi dipakai untuk mencari koefisien-koefisien yang diperlukan sehingga formulasi debit mendekati atau sesuai dengan data pengukuran.

Dibawah ini akan dijelaskan secara rinci cara analisis regresi untuk bangunan ukur debit ambang lebar baik untuk aliran bebas maupun menyelam.

2.1. UNTUK ALIRAN BEBAS

Dalam bidang ketekniksipilan khususnya sumberdaya air sering dijumpai bangunan bendung. Salah satu jenis bendung tersebut mempunyai sifat aliran aliran bebas seperti tampak dalam Gambar 2.1.

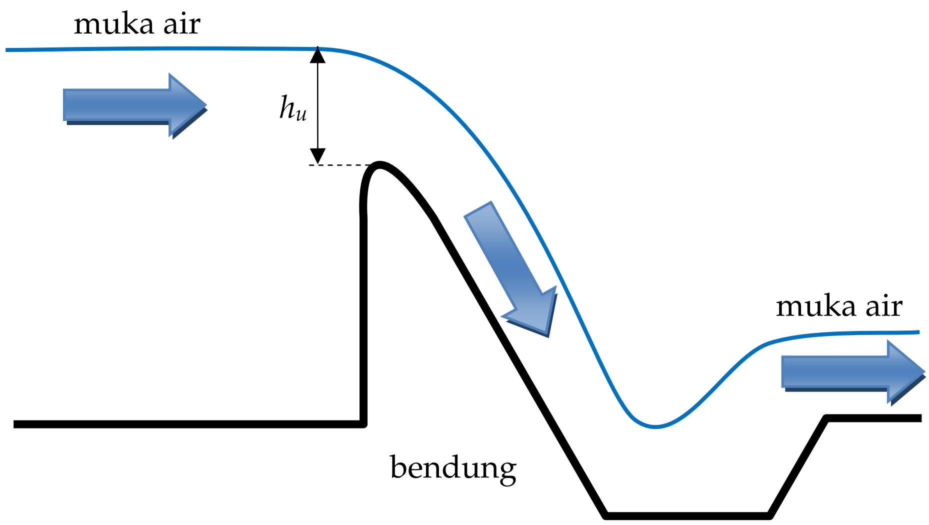
Bentuk umum formulasi debit pada bangunan ukur debit ambang lebar aliran bebas adalah

$$Q = \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} g} \right) C_d B h_u^{\ n} \tag{1.31}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk yang lebih umum

$$Q = C_r h_u^{\ n} \tag{1.32}$$

dengan Q adalah debit aliran, h_u adalah tinggi muka air disebelah hulu mercu bangunan ukur (diukur dari mercu bangunan), dan C_r, n adalah konstanta regresi yang dicari.



Gambar 2.1. Bendung dengan aliran bebas

Pers.(1.32) sesuai dengan kurva geometris, sehingga dapat diubah sesuai dengan bentuk Pers.(1.26) yaitu

$$\ln(Q) = \ln(C_r) + (n)\ln(h_u) \tag{1.33}$$

atau

$$Y = a + bX \tag{1.34}$$

dengan konstanta a dan b dihitung dengan Pers.(1.9) yang ditulis lagi seperti dibawah ini:

$$a = \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i\right)}{N\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2}$$

$$b = \frac{N\left(\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)}{N\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2}\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2} \tag{1.9}$$

dengan nilai x_i diganti dengan $\ln(h_u)$ dan nilai y_i diganti dengan $\ln(Q_i)$. Setelah nilai a dan b dihitung dari Pers. (1.9), maka nilai n dan C_r dihitung sebagai berikut:

$$n = b \text{ dan } C_r = \mathrm{Exp}(a) \tag{1.35}$$

2.2. UNTUK ALIRAN MENYELAM

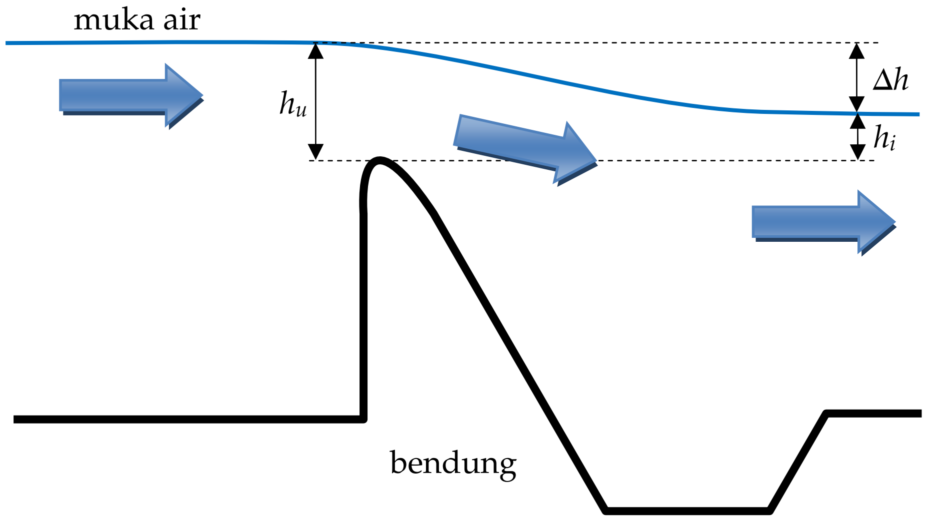
Bentuk umum formulasi debit pada bangunan ukur debit ambang lebar aliran menyelam adalah

$$Q = C_d B h_i \sqrt{2g}\,(h_u - h_i)^n \tag{1.36}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk yang lebih umum

$$Q = C_r h_i \Delta h^n \tag{1.37}$$

dengan Q adalah debit aliran, h_u adalah tinggi muka air di sebelah hulu mercu bangunan ukur (diukur dari mercu bangunan), h_i adalah tinggi muka air di sebelah hilir mercu bangunan ukur (diukur dari mercu bangunan), Δh adalah selisih muka air di hulu dan di hilir mercu bangunan (= h_u–h_i), dan C_r, n adalah konstanta regresi yang dicari.



Gambar 2.2. Bendung dengan aliran menyelam

Pers.(1.20b) dapat diubah menjadi bentuk umum polinomial dengan dua variabel sebagai berikut:

$$\ln(Q) = \ln(C_r) + \ln(h_i) + (n)\ln(\Delta h) \tag{1.38}$$

atau

$$Z = a + X + b\,Y \tag{1.39}$$

dengan a dan b adalah konstanta yang harus dicari dengan analisis regresi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} aN + \sum_{i=1}^{N} x_i + b\sum_{i=1}^{N} y_i &= \sum_{i=1}^{N} z_i \\ a\sum_{i=1}^{N} y_i + \sum_{i=1}^{N} x_i y_i + b\sum_{i=1}^{N} y_i^{\,2} &= \sum_{i=1}^{N} y_i z_i \end{aligned} \tag{1.40}$$

atau

$$\begin{aligned} aN + b\sum_{i=1}^{N} y_i &= \sum_{i=1}^{N} z_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \\ a\sum_{i=1}^{N} y_i + b\sum_{i=1}^{N} y_i^{\,2} &= \sum_{i=1}^{N} y_i z_i - \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{aligned} \tag{1.41}$$

Jika disimbolkan sebagai sistem dua persamaan linier:

$$p_1 = q_1\, a + r_1\, b \text{ dan } p_2 = q_2\, a + r_2\, b \tag{1.42}$$

maka a dan b dapat dihitung dengan rumus

$$a = \frac{p_1 r_2 - r_1 p_2}{q_1 r_2 - r_1 q_2} \text{ dan } b = \frac{q_1 p_2 - p_1 q_2}{q_1 r_2 - r_1 q_2} \tag{1.43}$$

dengan

$$\begin{aligned} p_1 &= \sum_{i=1}^{N} (z_i - x_i),\ q_i = N,\ r_1 = q_2 = \sum_{i=1}^{N} y_i \\ p_2 &= \sum_{i=1}^{N} \left[y_i (z_i - x_i) \right],\ r_2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^{\,2} \end{aligned} \tag{1.44}$$

Persamaan kurva regresi yang dipakai adalah Pers.(1.37) dengan konstanta regresinya dihitung dengan rumus

$$n = b \text{ dan } C_r = \mathrm{Exp}(a) \tag{1.45}$$

DAFTAR PUSTAKA

Carnahan, Brice, H.A. Luther, James O. Wilkes, Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons, New York, 1969.

Spiegel, R. Murray, Theory and Problems of Statistics, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill International Book Company, Singapore, 1981.

Al-Khafaji, Amir Wahdi, John R.Tooley, Numerical Methods in Engineering Practice, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1986.

Anonim, fx–7000G Owner's Manual, CASIO®

Atkinson, Kendall E., An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1989.

James, M.L., G.M. Smith, J.C. Wolford, Applied Numerical Methods for Digital Computation with Fortran and CSMP, 2nd Edition, Harper International Edition, New York, 1977.