# Analisis Frekuensi di bidang sumberdaya air

oleh

Djoko Luknanto

Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan

FT UGM

# Distribusi Normal $N(\mu=0,\sigma=1)$

$$y = \frac{e^{\frac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

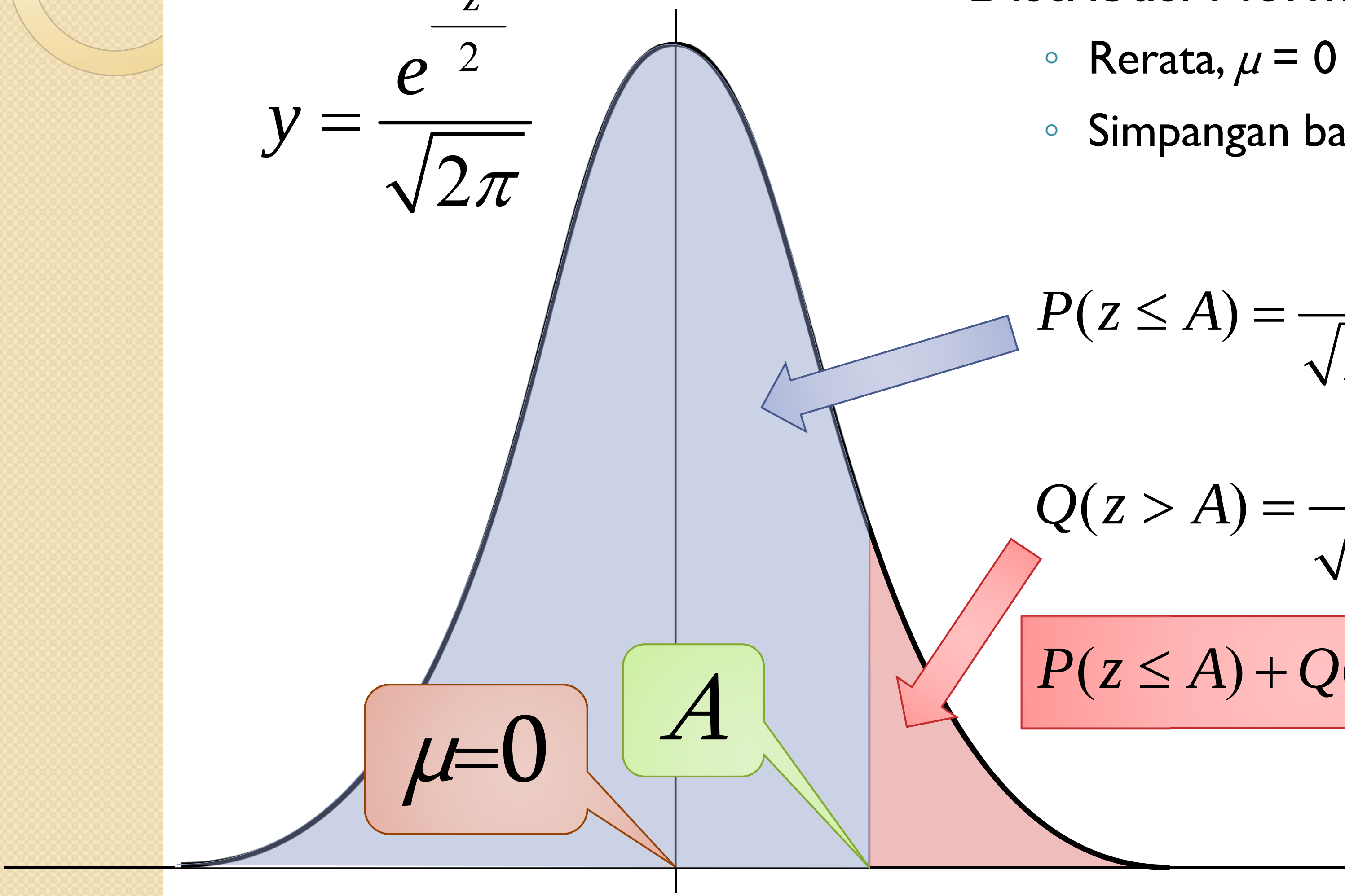
Distribusi Normal dengan

- Rerata, $\mu = 0$
- Simpangan baku, $\sigma = 1$

$$P(z \le A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{A} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

$$Q(z > A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A}^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

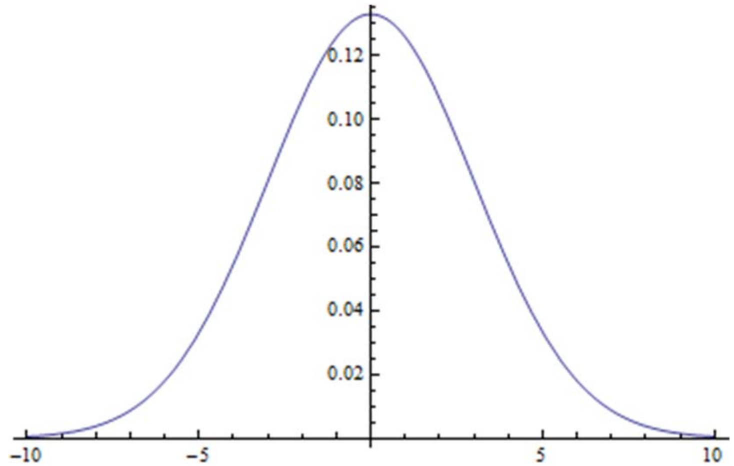
$$P(z \le A) + Q(z > A) = 1$$



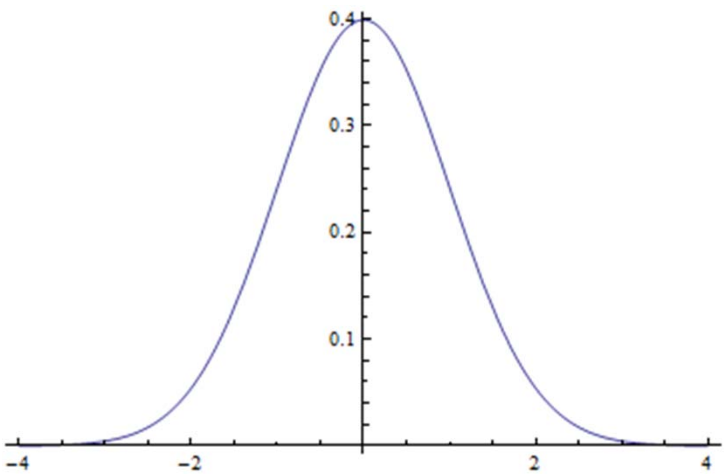
# Distribusi Normal $N(\mu=0,\sigma)$

Distribusi Normal dengan

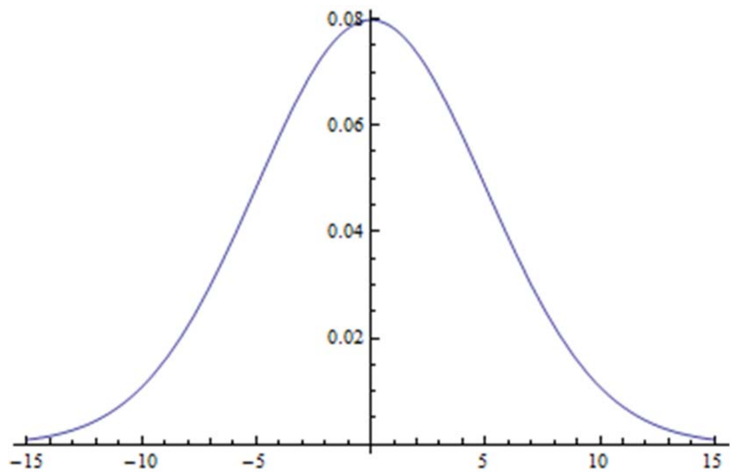
- Rerata, $\mu = 0$
- Simpangan baku, $\sigma = 1$
- Simpangan baku, $\sigma = 3$
- Simpangan baku, $\sigma = 5$




$N(\mu=0,\sigma=3)$




$N(\mu=0,\sigma=1)$




$N(\mu=0,\sigma=5)$

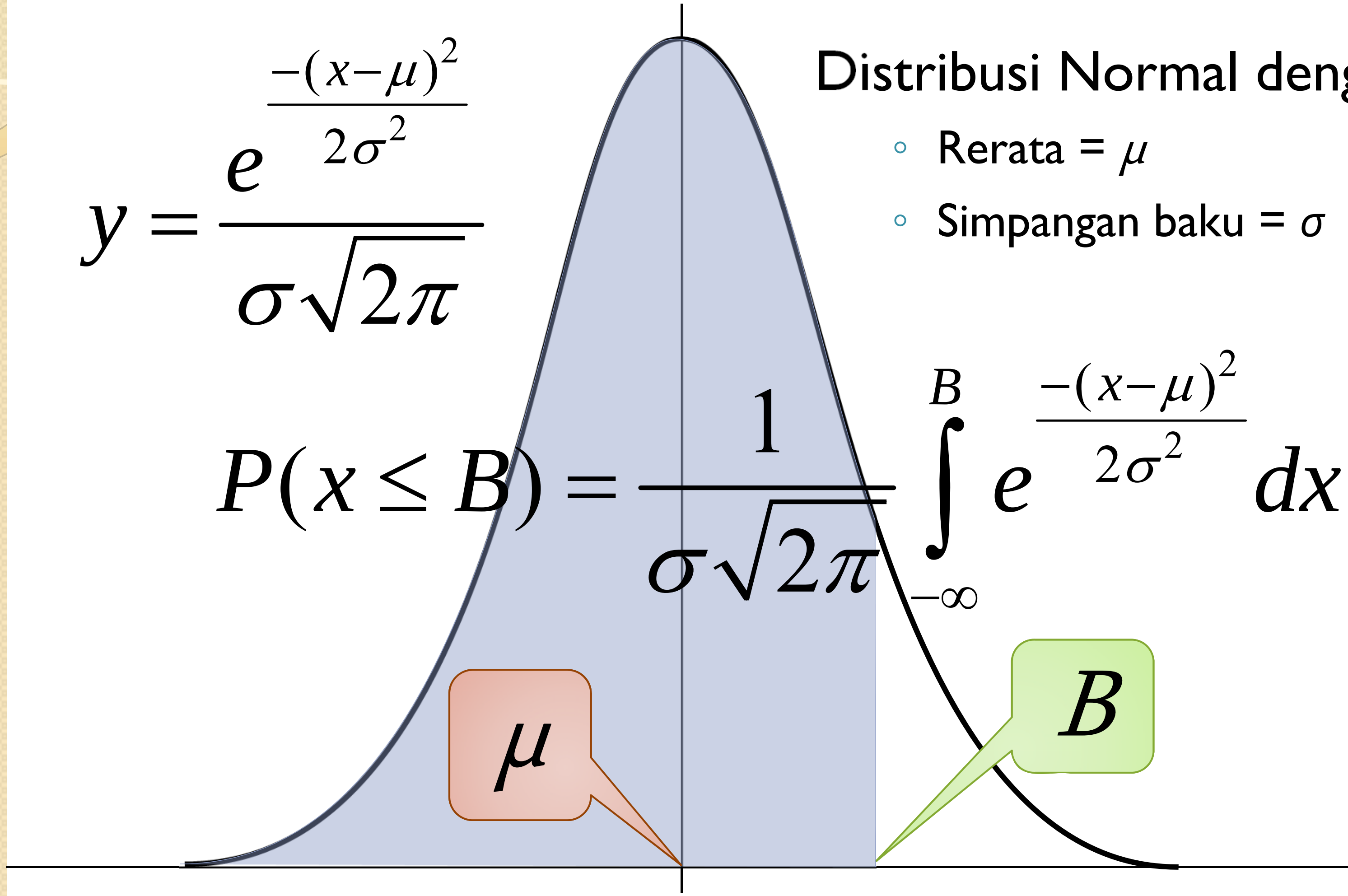
# Distribusi Normal $N(\mu,\sigma)$

$$y = \frac{e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

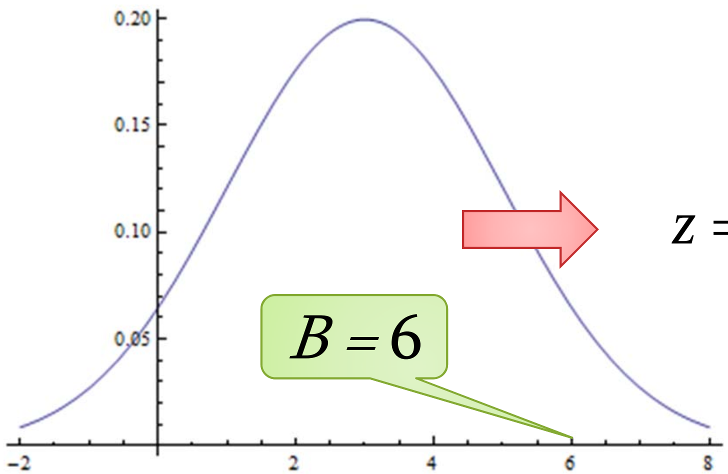
Distribusi Normal dengan

- Rerata = $\mu$
- Simpangan baku = $\sigma$

$$P(x \le B) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{B} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$$

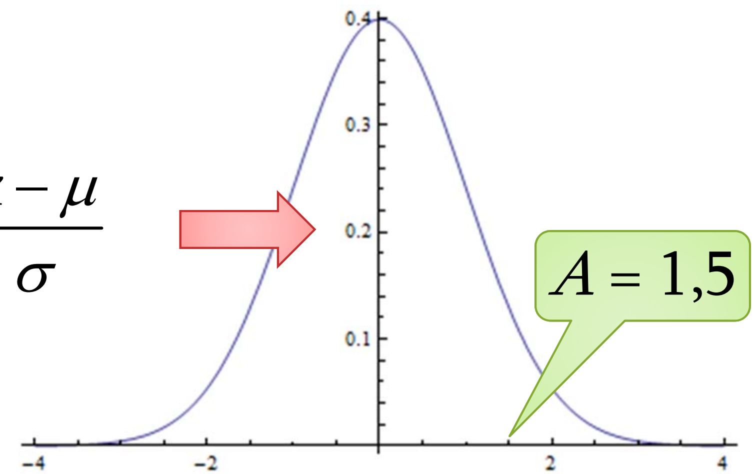


# Mapping $N(\mu,\sigma)$ menjadi $N(\mu=0,\sigma=1)$




$N(\mu=3,\sigma=2)$

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$




$N(\mu=0,\sigma=1)$

- Kurva $N(\mu=3,\sigma=2)$ dengan transformasi di atas dapat diubah menjadi $N(\mu=0,\sigma=1)$
- Titik *B* pada kurva $N(\mu=3,\sigma=2)$ lokasinya di-*mapping* ke dalam kurva $N(\mu=0,\sigma=1)$ yaitu di titik *A*.

# Analisis Frekuensi

- Andaikan suatu agihan (distribusi) data sumberdaya air sesuai dengan Distribusi Normal kurva $N(\mu,\sigma)$,
  - Tentukan nilai $P(x \leq B)$ sesuai kondisi lapangan, misal debit banjir/kekeringan dengan kala ulang tertentu *(T* = 20 tahun), atau debit andalan (97,5%).
  - Hitung titik *A* pada kurva $N(\mu=0,\sigma=1)$ dengan metoda standard seperti disajikan dalam buku-buku acuan.
  - Hitung nilai sumberdaya air terkait, *x* dengan formula:

$$A = \frac{B - \mu}{\sigma} \Longrightarrow B = \mu + A\sigma$$

## Menghitung *Q*(*A*) pada kurva *N*($\mu$=0,$\sigma$=1)

- Menurut Abramowitz & Stegun, Handbook of Mathematical Functions, 1972, halaman 932, *Q*(*A*):

$$Q(A) \doteq Q(x > A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

untuk *A* ≥ 0 dapat dihitung dengan polinomial pendekatan sebagai berikut:

$$Q(A) = \frac{1}{2}(1 + 0{,}196854A + 0{,}115194A^2 + 0{,}000344A^3 + 0{,}019527A^4)^{-4}$$

# Perbandingan dengan MS Excel

- Pada Kolom A & S gunakan persamaan kedua dari Abramowitz & Stegun.
- Pada Kolom MS Excel gunakan formula {1-NORMSDIST(*A*)}

| *A* | *Q*(*z*>*A*) | |
|---|---|---|
| | A & S | MS Excel |
| -3,0000 | 0,9984 | 0,9987 |
| -1,0000 | 0,8411 | 0,8413 |
| 0,0000 | 0,5000 | 0,5000 |
| 1,0000 | 0,1589 | 0,1587 |
| 3,0000 | 0,0016 | 0,0013 |

## Menghitung *A* pada kurva $N(\mu=0,\sigma=1)$

- Menurut Abramowitz & Stegun, Handbook of Mathematical Functions, 1972, halaman 933, *Q*(*A*):

$$Q(A) \doteq Q(x > A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^\infty e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

jika *Q*(*A*) = *p*, dengan 0 < *p* < 0,5 maka *A* dapat dihitung formula pendekatan sbb:

$$A = t - \frac{2,515517 + 0,802853t + 0,010328t^2}{1 + 1,432788t + 0,189269t^2 + 0,001308t^3} \text{ dengan } t = \sqrt{\ln \frac{1}{p^2}}$$

# Perbandingan dengan MS Excel

- Pada Kolom A & S gunakan persamaan pertama dari Abramowitz & Stegun.
- Pada Kolom MS Excel gunakan formula {NORMSINV(1-*p*)}

| $p = Q(z>A)$ | $t = \sqrt{\ln(1/p^2)}$ | $A$ | |
|---|---|---|---|
| | | A & S | MS Excel |
| 0,9987 | 3,6353 | -3,0003 | -3,0000 |
| 0,8413 | 1,9189 | -1,0000 | -1,0000 |
| 0,5000 | 1,1774 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,1587 | 1,9189 | 1,0000 | 1,0000 |
| 0,0013 | 3,6353 | 3,0003 | 3,0000 |