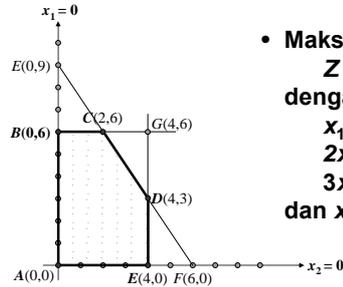


# Optimasi

## Bab Metoda Simplex

Djoko Luknanto  
 Staf Pengajar  
 Jurusan Teknik Sipil FT UGM

### Masalah Awal



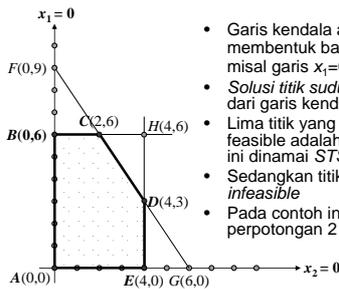
- Maksimumkan  $Z = 3x_1 + 5x_2$  dengan kendala  $x_1 \leq 4$ ,  $2x_2 \leq 12$ ,  $3x_1 + 2x_2 \leq 18$  dan  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

24/08/2003

Jack la Motta

2

### Definisi



- Garis kendala adalah garis yang membentuk batas dari kendala terkait, misal garis  $x_1=0, x_2=0, BG, EF, EG$
- Solusi titik sudut (STS) adalah titik potong dari garis kendala
- Lima titik yang berada pada kawasan feasible adalah  $A, B, C, D, E$ . Kelima titik ini dinamai STS feasible (STSF)
- Sedangkan titik  $F, G, H$  disebut solusi STS infeasible
- Pada contoh ini setiap STS terletak pada perpotongan 2 garis kendala.

24/08/2003

Jack la Motta

3

### Definisi ... 2

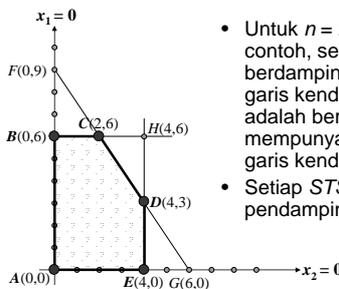
- Untuk program linier dengan  $n$  variabel keputusan, setiap STS merupakan perpotongan  $n$  garis kendala
- Untuk setiap masalah program linier dengan  $n$  variabel keputusan, 2 STS feasible (STSF) akan berdampingan jika kedua STSF tersebut mempunyai  $n-1$  garis kendala yang sama
- Dua STSF yang berdampingan akan dihubungkan oleh sebuah segmen garis dengan kendala yang sama

24/08/2003

Jack la Motta

4

### Contoh



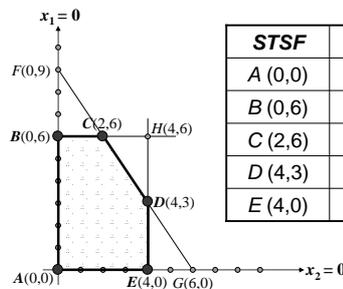
- Untuk  $n = 2$  seperti dalam contoh, setiap 2 STSF akan berdampingan jika mempunyai 1 garis kendala, misal  $A$  dan  $B$  adalah berdampingan karena mempunyai garis  $x_1 = 0$  sebagai garis kendala
- Setiap STSF mempunyai pendamping 2 STSF

24/08/2003

Jack la Motta

5

### Solusi Titik Sudut Feasible



STSF	Pendampingnya
A (0,0)	B (0,6) dan E (4,0)
B (0,6)	A (0,0) dan C (2,6)
C (2,6)	B (0,6) dan D (4,3)
D (4,3)	C (2,6) dan E (4,0)
E (4,0)	D (4,3) dan A (0,0)

24/08/2003

Jack la Motta

6

## Tes Optimum

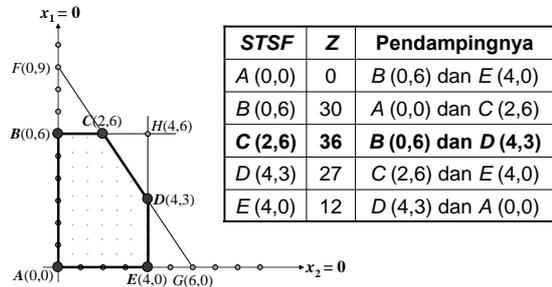
- Pada sebuah permasalahan program linier yang mempunyai paling tidak satu solusi, jika sebuah STSF tidak mempunyai STSF pendamping yang lebih baik, maka STSF tersebut adalah solusi optimum

24/08/2003

Jack la Motta

7

## Ilustrasi tes optimum

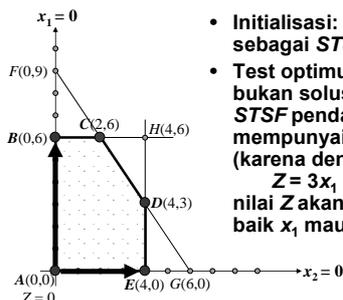


24/08/2003

Jack la Motta

8

## Langkah Penyelesaian 1



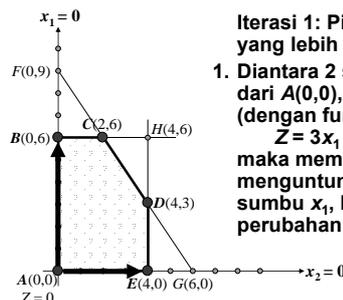
- **Initialisasi:** Pilih  $A(0,0)$  sebagai STSF untuk diteliti
- **Test optimum:** Ternyata  $A(0,0)$  bukan solusi optimum karena STSF pendamping mempunyai solusi lebih bagus (karena dengan fungsi tujuan  $Z = 3x_1 + 5x_2$  nilai  $Z$  akan naik pada arah baik  $x_1$  maupun  $x_2$ )

24/08/2003

Jack la Motta

9

## Langkah Penyelesaian 2



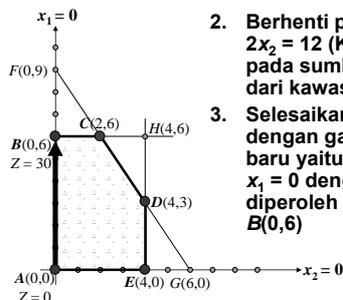
- Iterasi 1: Pindah ke STSF yang lebih bagus**
1. Diantara 2 sisi yang berasal dari  $A(0,0)$ , pilih sisi sumbu  $x_2$ . (dengan fungsi tujuan  $Z = 3x_1 + 5x_2$  maka memilih sumbu  $x_2$  lebih menguntungkan dibanding sumbu  $x_1$ , karena laju perubahan nilai  $Z$  lebih besar)

24/08/2003

Jack la Motta

10

## Langkah Penyelesaian 3



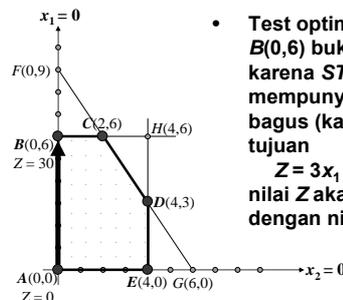
2. Berhenti pada garis kendala  $2x_2 = 12$  (Karena terus melaju pada sumbu  $x_2$  akan keluar dari kawasan feasible)
3. Selesaikan titik potong dengan garis kendala yang baru yaitu titik potong antara  $x_1 = 0$  dengan  $2x_2 = 12 \rightarrow$  diperoleh STSF baru yaitu  $B(0,6)$

24/08/2003

Jack la Motta

11

## Langkah Penyelesaian 4



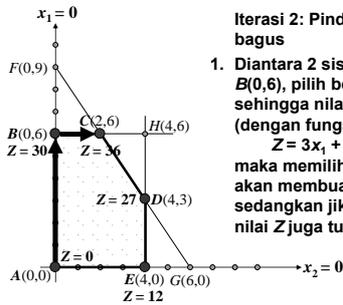
- **Test optimum:** Ternyata  $B(0,6)$  bukan solusi optimum karena STSF pendamping mempunyai solusi lebih bagus (karena dengan fungsi tujuan  $Z = 3x_1 + 5x_2$  nilai  $Z$  akan naik pada arah  $x_1$  dengan nilai  $x_2$  tetap)

24/08/2003

Jack la Motta

12

## Langkah Penyelesaian 5



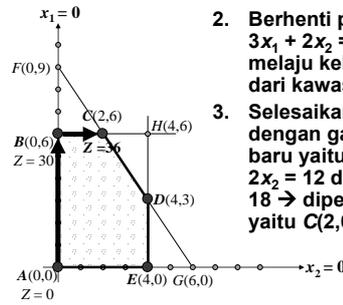
24/08/2003

Jack la Motta

13

- Iterasi 2: Pindah ke STSF yang lebih bagus
1. Diantara 2 sisi yang berasal dari  $B(0,6)$ , pilih bergerak ke kanan sehingga nilai  $x_2$  bertambah (dengan fungsi tujuan  $Z = 3x_1 + 5x_2$  maka memilih bergerak kekanan akan membuat nilai  $Z$  naik, sedangkan jika memilih turun maka nilai  $Z$  juga turun)

## Langkah Penyelesaian 6



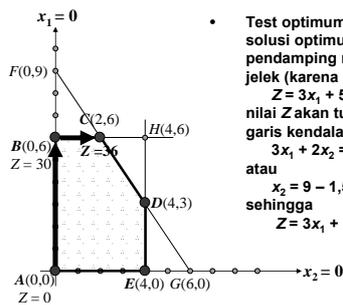
24/08/2003

Jack la Motta

14

2. Berhenti pada garis kendala  $3x_1 + 2x_2 = 18$  (Karena terus melaju kekanan akan keluar dari kawasan feasible)
3. Selesaikan titik potong dengan garis kendala yang baru yaitu titik potong antara  $2x_2 = 12$  dengan  $3x_1 + 2x_2 = 18 \rightarrow$  diperoleh STSF baru yaitu  $C(2,6)$

## Langkah Penyelesaian 7



24/08/2003

Jack la Motta

15

- Test optimum: Ternyata  $C(2,6)$  adalah solusi optimum karena STSF pendamping mempunyai solusi lebih jelek (karena dengan fungsi tujuan  $Z = 3x_1 + 5x_2$  nilai  $Z$  akan turun pada saat menuruti garis kendala  $3x_1 + 2x_2 = 18$  atau  $x_2 = 9 - 1,5x_1$  sehingga  $Z = 3x_1 + 5x_2 = 45 - 4,5x_1$ )

## Konsep Penyelesaian Simplex 1

1. Konsentrasi hanya pada STSF. Untuk setiap masalah yang mempunyai paling tidak satu solusi optimum, menemukan salah satu solusi hanya perlu menemukan STSF terbaik

24/08/2003

Jack la Motta

16

## Konsep Penyelesaian Simplex 2

2. Merupakan algoritma iteratif dengan langkah-langkah berikut:
  - a) **Inisialisasi:** awali dengan memilih STSF
  - b) **Test optimum:** apakah STSF terpilih lebih bagus dari STSF pendamping
    - i. jika ya, maka STSF akhir adalah solusi optimum
    - ii. jika tidak maka lanjutkan ke langkah c)
  - c) **Iterasi:** pilih STSF yang lebih bagus dan ulangi langkah b)
3. Jika mungkin awali inisialisasi dengan nilai STSF pada titik sumbu koordinat.

24/08/2003

Jack la Motta

17

## Konsep Penyelesaian Simplex 3

4. Setiap iterasi untuk memilih STSF berikutnya, hanya ditinjau STSF pendampingnya saja. STSF yang lain tidak usah ditinjau.
5. Setiap kali STSF berikut terpilih, harus dicari STSF pendampingnya. Metoda simplex tidak akan menghitung nilai  $Z$ , namun hanya menggunakan laju perubahan nilai  $Z$  yang terbaik untuk menentukan STSF berikutnya yang terpilih.

24/08/2003

Jack la Motta

18

## Konsep Penyelesaian Simplex 4

6. Pada permasalahan *memaksimumkan* nilai positif untuk *laju perbaikan nilai Z* menunjukkan bahwa pada arah tersebut *STSF* pendamping adalah solusi yang lebih baik, sedangkan nilai negatif untuk *laju perbaikan nilai Z* menunjukkan bahwa pada arah tersebut *STSF* pendamping adalah solusi yang lebih buruk.

24/08/2003

Jack la Motta

19

## Konsep Penyelesaian Numerik

- Penyelesaian metoda simplex pada dasarnya menggunakan *sistem persamaan linier*
- Oleh karena itu pertama kali yang harus dilakukan adalah mengubah kendala pertidaksamaan menjadi persamaan
- Perubahan ini dilakukan dengan pengenalan variabel *slack*
- Kendala non-negatif dibiarkan saja karena akan diperlakukan secara lain

24/08/2003

Jack la Motta

20

## Contoh perubahan kendala

- Kendala semula:  $x_1 \leq 4$
- Diubah bentuk menjadi  $4 - x_1 \geq 0$
- Didefinisikan variable *slack*  
 $x_3 = 4 - x_1$
- Sehingga diperoleh:  
 $x_1 + x_3 = 4$   
 $x_3 \geq 0$

24/08/2003

Jack la Motta

21

## Contoh perubahan kendala

- Kendala semula:  $x_1 \geq 4$
- Diubah bentuk menjadi  $x_1 - 4 \geq 0$
- Didefinisikan variable *slack*  
 $x_3 = x_1 - 4$
- Sehingga diperoleh:  
 $x_1 - x_3 = 4$   
 $x_3 \geq 0$

24/08/2003

Jack la Motta

22

## Persamaan Simplex

- | Bentuk Asli  | Bentuk Augmented   |
|--|--|
| • Maksimumkan<br>$Z = 3x_1 + 5x_2$<br>dengan kendala<br>$x_1 \leq 4$<br>$2x_2 \leq 12$<br>$3x_1 + 2x_2 \leq 18$<br>dan<br>$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ | • Maksimumkan<br>$Z = 3x_1 + 5x_2$<br>dengan kendala<br>$x_1 + x_3 = 4$<br>$2x_2 + x_4 = 12$<br>$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$<br>dan<br>$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$<br>$x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ |

24/08/2003

Jack la Motta

23

## Terminologi dan Definisi

### Metoda Simplex

## Solusi augmented

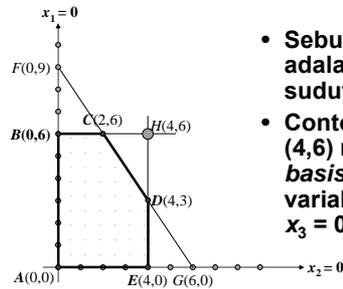
- Solusi *augmented* adalah solusi untuk variabel asli (variabel keputusan) yang telah ditambah dengan variabel *slack*  
Contoh: solusi (3,2) setara dengan solusi *augmented* (3,2,1,8,5) karena variabel *slack*nya  $x_3 = 1$ ,  $x_4 = 8$ ,  $x_5 = 5$  yang diperoleh dari menyelesaikan persamaan kendala (3 persamaan)

24/08/2003

Jack la Motta

25

## Solusi basis



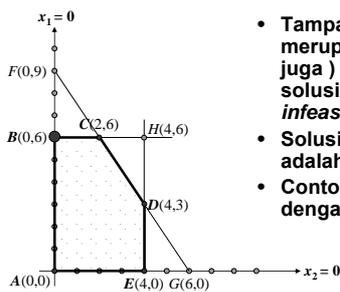
- Sebuah solusi *basis* adalah solusi titik sudut *augmented*
- Contoh: STS infeasible (4,6) mempunyai solusi *basis* (4,6,0,0,-6) karena variabel *slack*nya:  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ,  $x_5 = -6$

24/08/2003

Jack la Motta

26

## Solusi basis feasible



- Tampak bahwa STS (yang merupakan solusi *basis* juga) dapat merupakan solusi *feasible* maupun *infeasible*, maka
- Solusi *basis feasible* (SBF) adalah STSF augmented
- Contoh STSF (0,6) setara dengan SBF (0,6,4,0,6)

24/08/2003

Jack la Motta

27

## Karakteristik Solusi Basis 1

1. Setiap variabel dikelompokkan menjadi variabel basis dan non-basis.
2. Jumlah variabel basis = jumlah fungsi kendala (persamaan). Jadi jumlah variabel non-basis = jumlah total variabel – jumlah variabel basis.

24/08/2003

Jack la Motta

28

## Karakteristik Solusi Basis 2

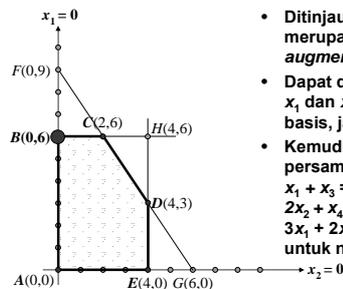
3. Semua variabel non-basis diberi nilai nol.
4. Nilai semua variabel basis dihitung dengan menyelesaikan sistem persamaan linier dari fungsi kendala.
5. Jika nilai setiap variabel basis memenuhi kendala non-negatif, maka solusi basis ini merupakan solusi *basis feasible* (SBF).

24/08/2003

Jack la Motta

29

## Ilustrasi 1



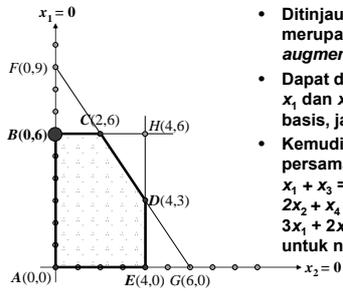
- Ditinjau SBF (0,6,4,0,6) yang merupakan STSF (0,6) *augmented*
- Dapat diinterpretasikan sbb: pilih  $x_1$  dan  $x_2$  sebagai variabel non-basis, jadi nilainya dibuat nol.
- Kemudian selesaikan persamaan:  
 $x_1 + x_3 = 4 \rightarrow x_3 = 4$   
 $2x_2 + x_4 = 12 \rightarrow x_2 = 6$   
 $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \rightarrow x_5 = 6$   
 untuk nilai  $x_1 = 0$  dan  $x_4 = 0$

24/08/2003

Jack la Motta

30

## Ilustrasi 2



- Ditinjau *SBF*  $(0,0,4,12,18)$  yang merupakan *STSF*  $(0,0)$  *augmented*
- Dapat diinterpretasikan sbb: pilih  $x_1$  dan  $x_4$  sebagai variabel non-basis, jadi nilainya dibuat nol.
- Kemudian selesaikan persamaan:
 

$x_1 + x_3 = 4$	$\rightarrow x_3 = 4$
$2x_2 + x_4 = 12$	$\rightarrow x_4 = 12$
$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$	$\rightarrow x_5 = 18$

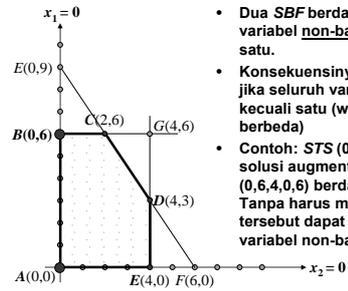
 untuk nilai  $x_1 = 0$  dan  $x_2 = 0$

24/08/2003

Jack la Motta

31

## SBF Berdampungan



- Dua *SBF* berdampungan jika seluruh variabel non-basis adalah sama kecuali satu.
- Konsekuensinya dua *SBF* berdampungan jika seluruh variabel basis adalah sama kecuali satu (walaupun nilainya mungkin berbeda)
- Contoh: *STS*  $(0,0)$  dan  $(0,6)$  berdampungan, solusi *augmentednya* *SBF*  $(0,0,4,12,18)$  dan  $(0,6,4,0,6)$  berdampungan  
Tanpa harus melihat gambar, kesimpulan tersebut dapat dilihat dari perubahan variabel non-basis  $(x_1, x_2)$  dan  $(x_1, x_4)$

24/08/2003

Jack la Motta

32