

Optimasi

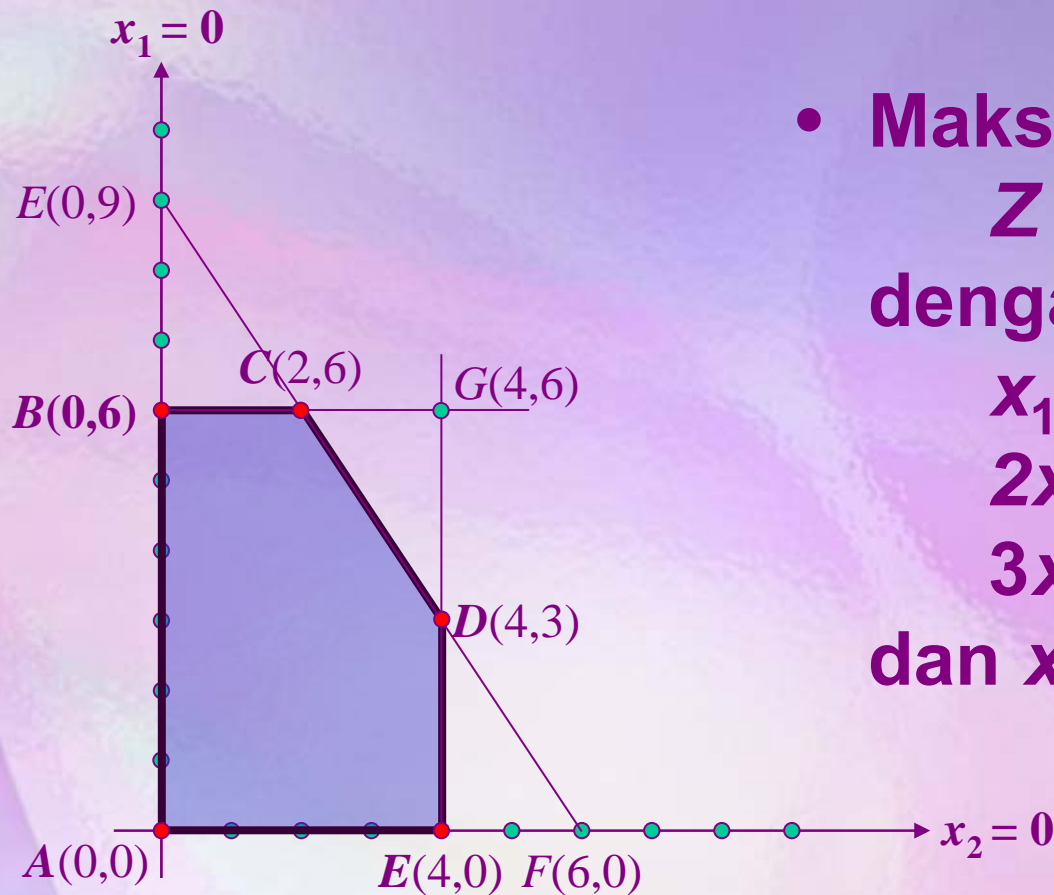
Bab Metoda Simplex

Djoko Luknanto

Staf Pengajar

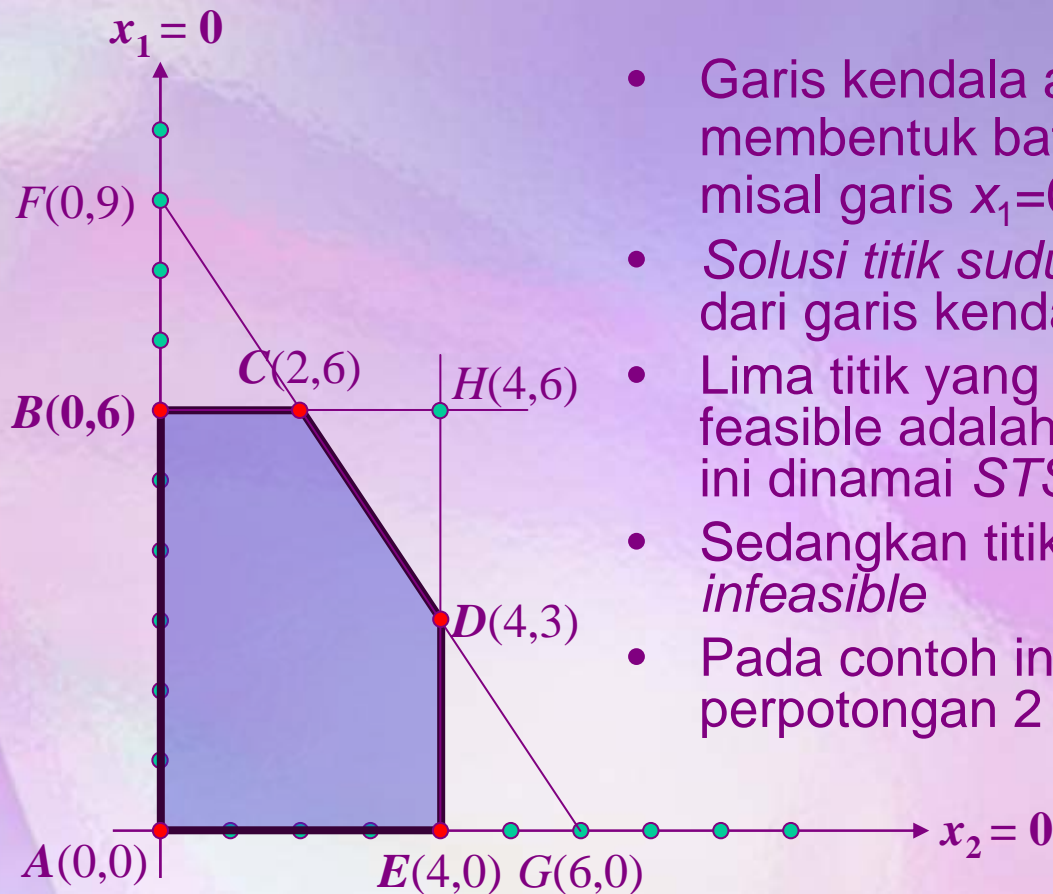
Jurusan Teknik Sipil FT UGM

Masalah Awal



- Maksimumkan
 $Z = 3x_1 + 5x_2$
dengan kendala
 $x_1 \leq 4$
 $2x_2 \leq 12$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$
dan $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Definisi



- Garis kendala adalah garis yang membentuk batas dari kendala terkait, misal garis $x_1=0$, $x_2=0$, BG , EF , EG
- *Solusi titik sudut* (STS) adalah titik potong dari garis kendala
- Lima titik yang berada pada kawasan feasible adalah A , B , C , D , E . Kelima titik ini dinamai *STS feasible* (STSF)
- Sedangkan titik F , G , H disebut solusi *STS infeasible*
- Pada contoh ini setiap STS terletak pada perpotongan 2 garis kendala.

Definisi ... 2

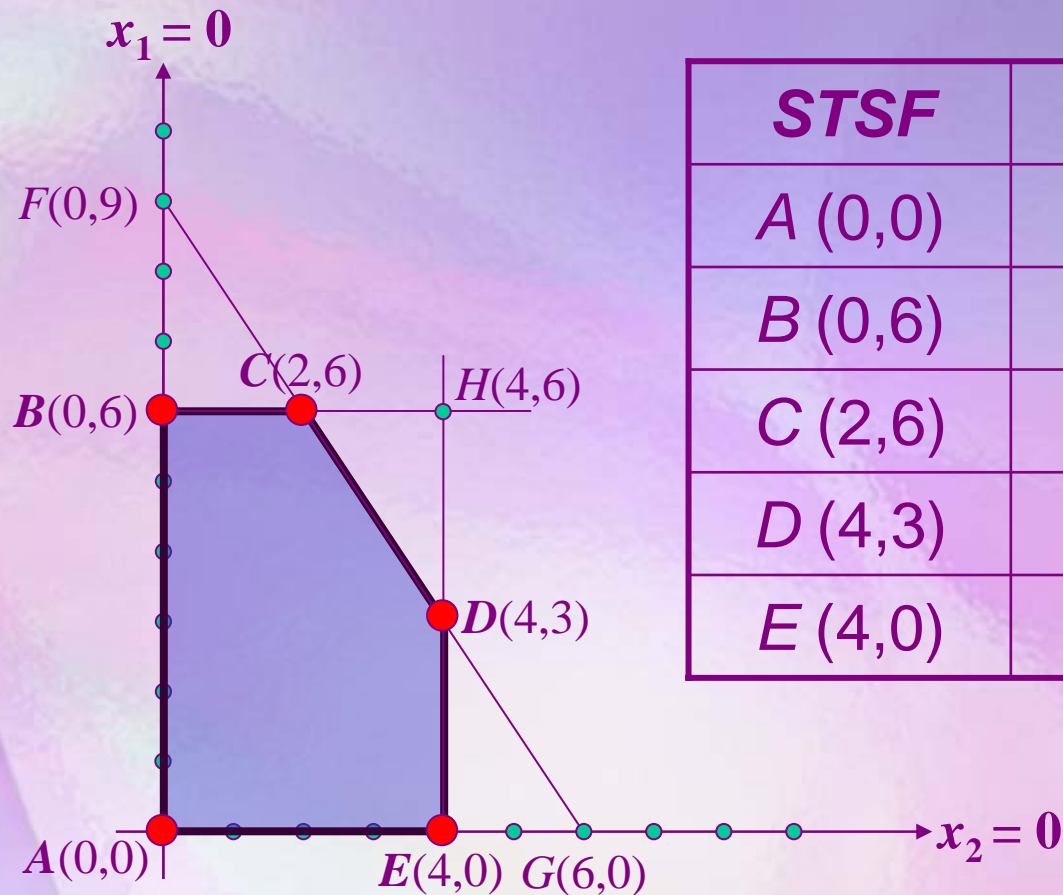
- Untuk program linier dengan n variabel keputusan, setiap *STS* merupakan perpotongan n garis kendala
- Untuk setiap masalah program linier dengan n variabel keputusan, 2 *STS feasible (STSF)* akan berdampingan jika kedua *STSF* tersebut mempunyai $n-1$ garis kendala yang sama
- Dua *STSF* yang berdampingan akan dihubungkan oleh sebuah segmen garis dengan kendala yang sama

Contoh



- Untuk $n = 2$ seperti dalam contoh, setiap 2 *STSF* akan berdampingan jika mempunyai 1 garis kendala, misal A dan B adalah berdampingan karena mempunyai garis $x_1 = 0$ sebagai garis kendala
- Setiap *STSF* mempunyai pendamping 2 *STSF*

Solusi Titik Sudut Feasible

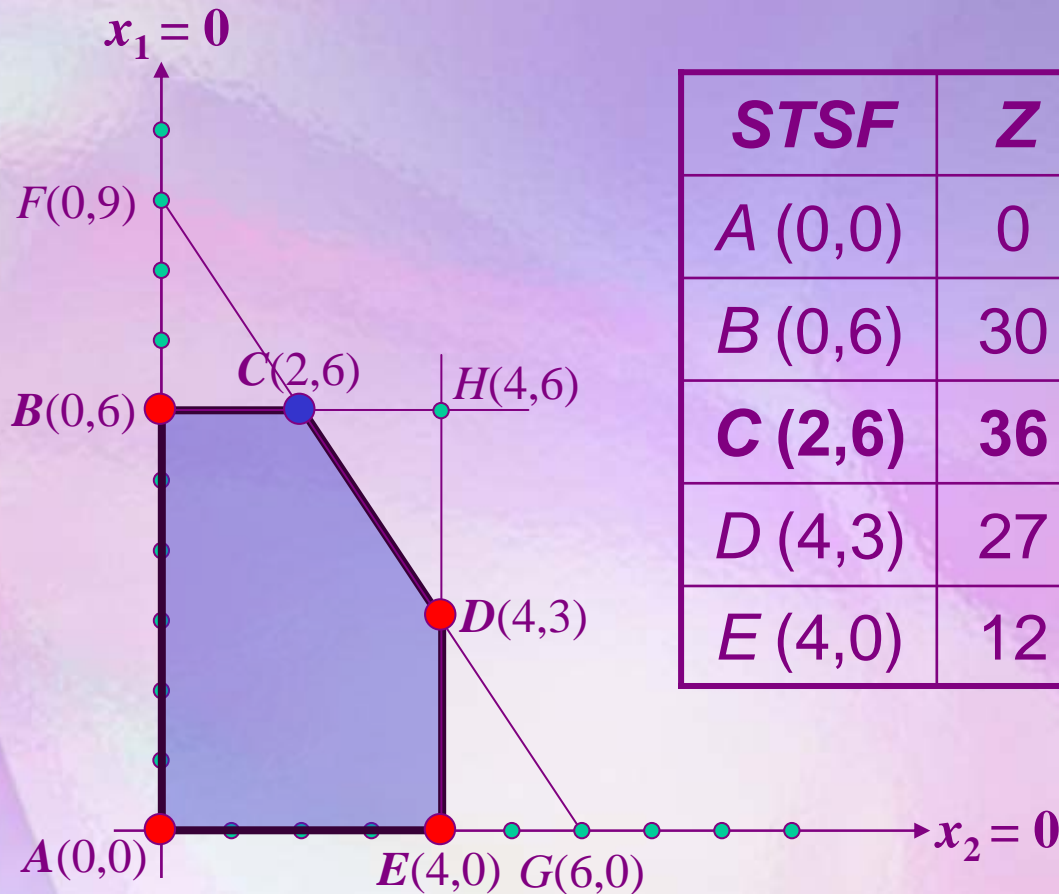


| <i>STSF</i> | Pendampingnya |
|-------------|-----------------------|
| $A(0,0)$ | $B(0,6)$ dan $E(4,0)$ |
| $B(0,6)$ | $A(0,0)$ dan $C(2,6)$ |
| $C(2,6)$ | $B(0,6)$ dan $D(4,3)$ |
| $D(4,3)$ | $C(2,6)$ dan $E(4,0)$ |
| $E(4,0)$ | $D(4,3)$ dan $A(0,0)$ |

Tes Optimum

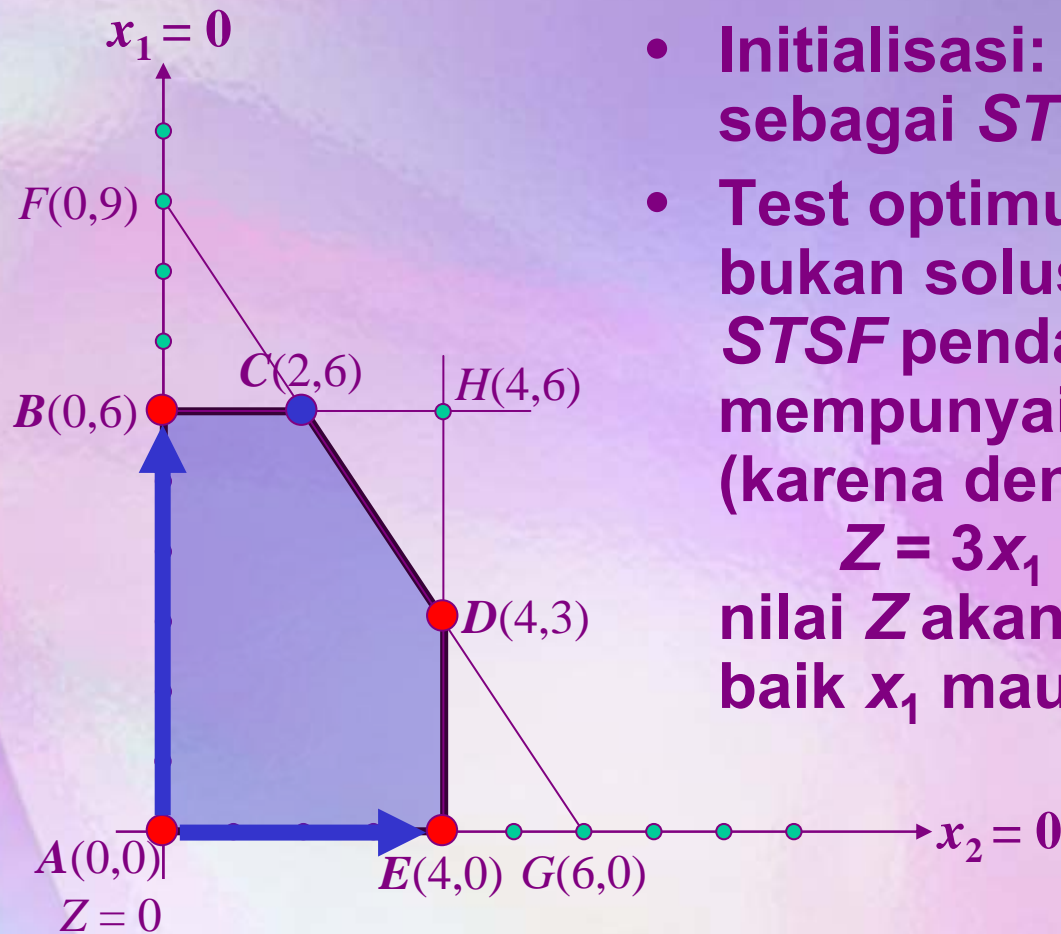
- Pada sebuah permasalahan program linier yang mempunyai paling tidak satu solusi, jika sebuah *STSF* tidak mempunyai *STSF* pendamping yang lebih baik, maka *STSF* tersebut adalah solusi optimum

Ilustrasi tes optimum



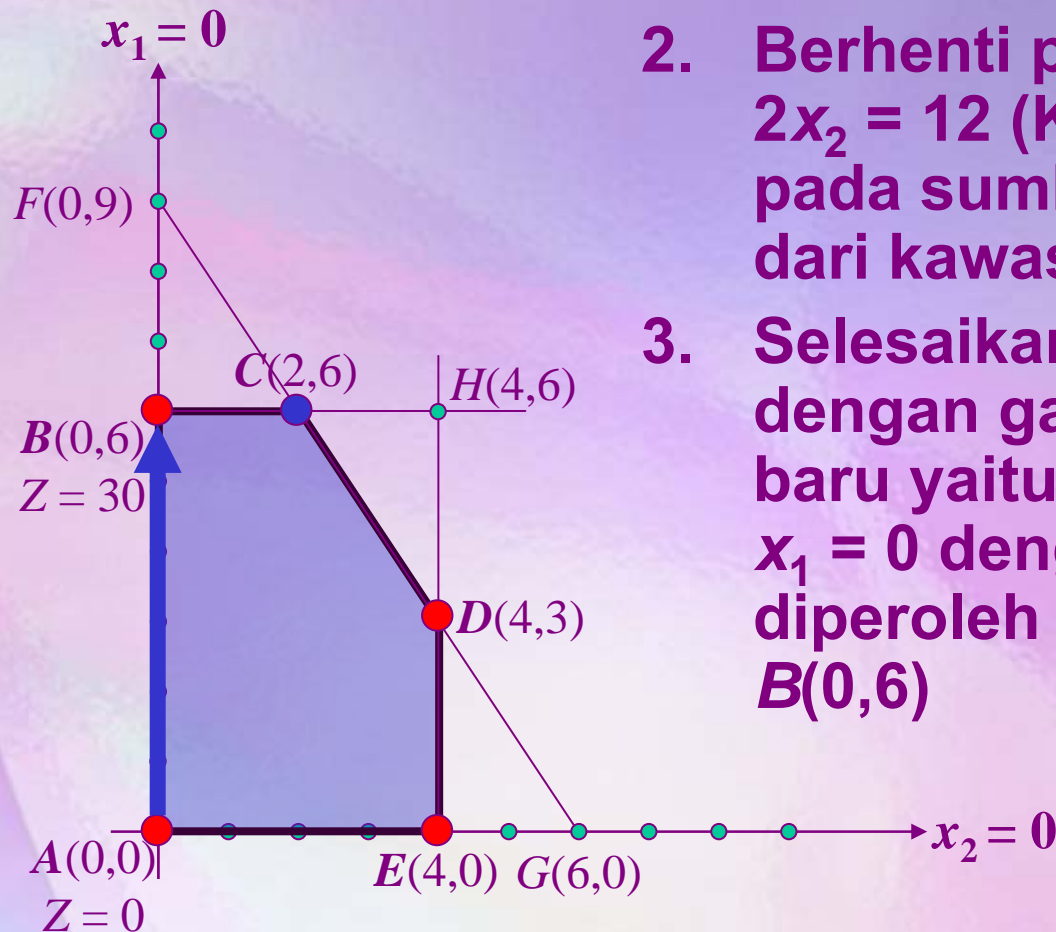
| <i>STSF</i> | <i>Z</i> | <i>Pendampingnya</i> |
|-----------------------|------------------|-----------------------------------|
| <i>A (0,0)</i> | <i>0</i> | <i>B (0,6) dan E (4,0)</i> |
| <i>B (0,6)</i> | <i>30</i> | <i>A (0,0) dan C (2,6)</i> |
| <i>C (2,6)</i> | <i>36</i> | <i>B (0,6) dan D (4,3)</i> |
| <i>D (4,3)</i> | <i>27</i> | <i>C (2,6) dan E (4,0)</i> |
| <i>E (4,0)</i> | <i>12</i> | <i>D (4,3) dan A (0,0)</i> |

Langkah Penyelesaian 1



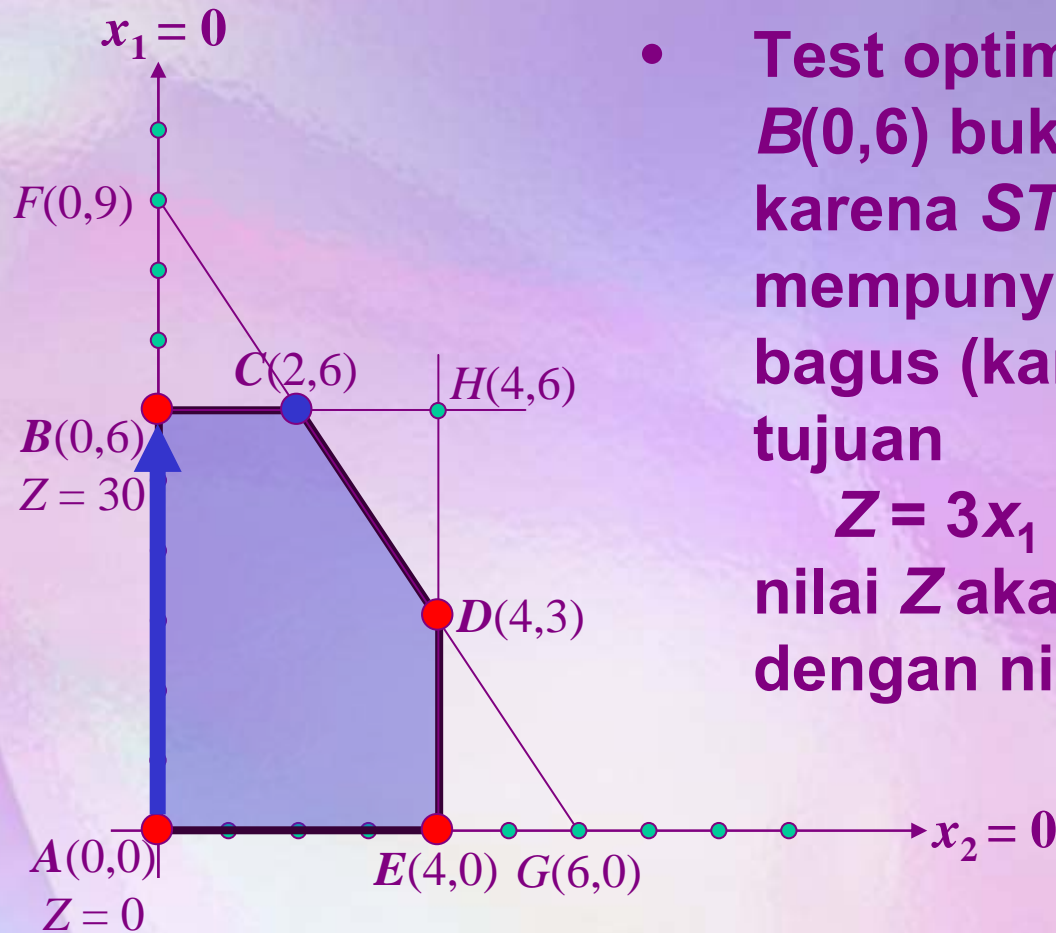
- Inisialisasi: Pilih $A(0,0)$ sebagai *STSF* untuk diteliti
- Test optimum: Ternyata $A(0,0)$ bukan solusi optimum karena *STSF* pendamping mempunyai solusi lebih bagus (karena dengan fungsi tujuan $Z = 3x_1 + 5x_2$ nilai Z akan naik pada arah baik x_1 maupun x_2)

Langkah Penyelesaian 3



2. Berhenti pada garis kendala $2x_2 = 12$ (Karena terus melaju pada sumbu x_2 akan keluar dari kawasan feasible)
3. Selesaikan titik potong dengan garis kendala yang baru yaitu titik potong antara $x_1 = 0$ dengan $2x_2 = 12 \rightarrow$ diperoleh *STSF* baru yaitu $B(0,6)$

Langkah Penyelesaian 4

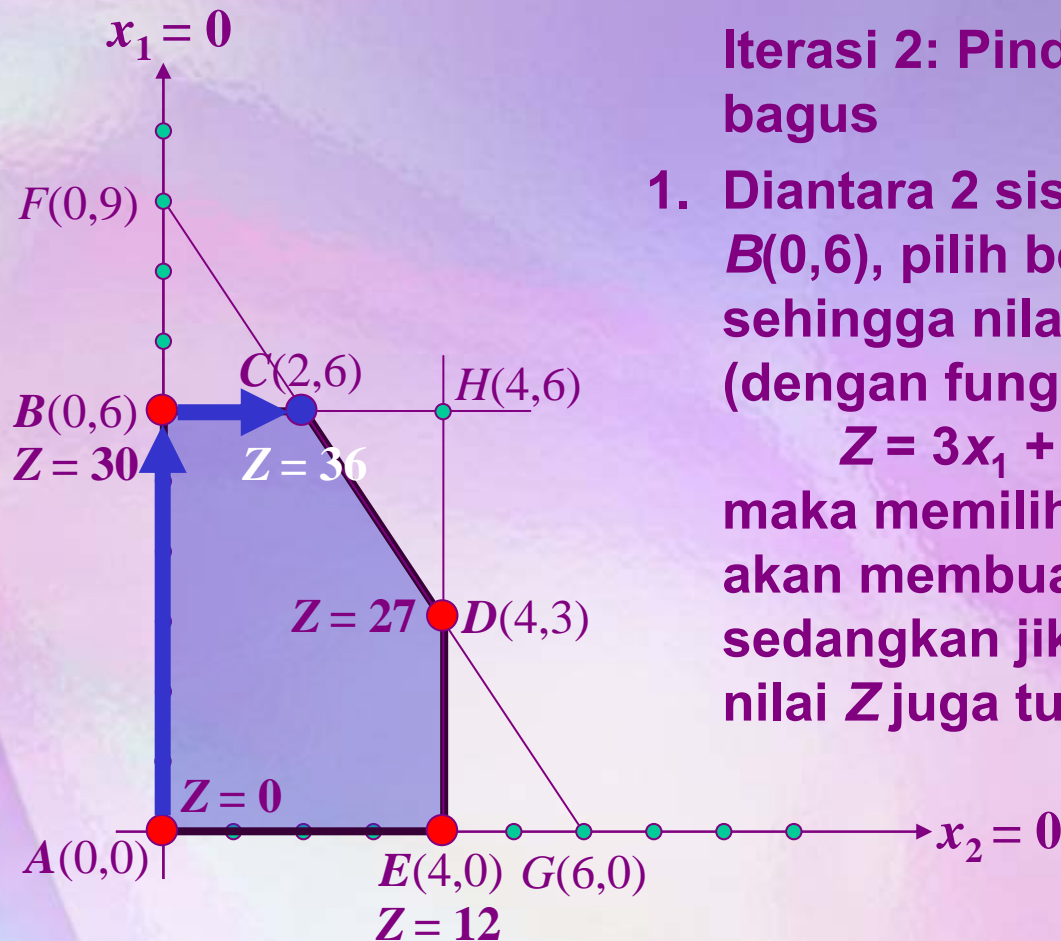


- Test optimum: Ternyata $B(0,6)$ bukan solusi optimum karena *STSF* pendamping mempunyai solusi lebih bagus (karena dengan fungsi tujuan

$$Z = 3x_1 + 5x_2$$

nilai Z akan naik pada arah x_1 dengan nilai x_2 tetap

Langkah Penyelesaian 5



Iterasi 2: Pindah ke *STSF* yang lebih bagus

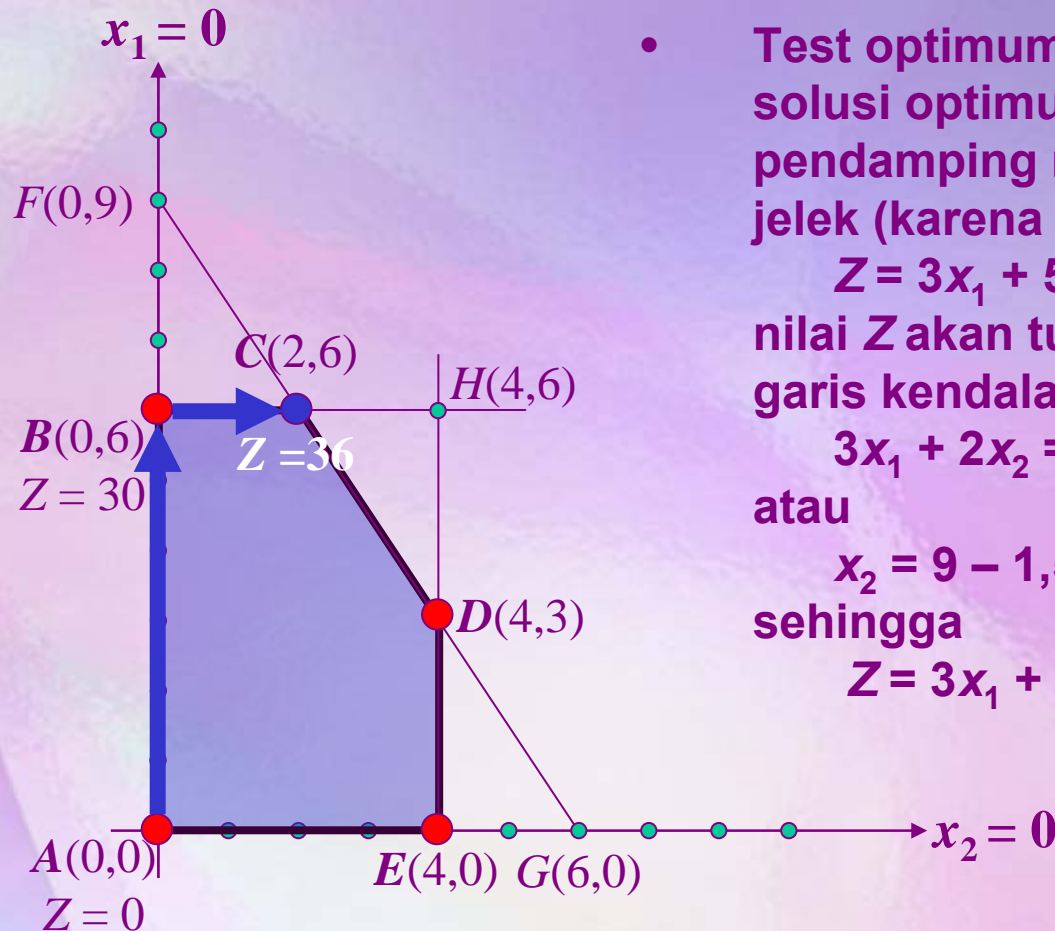
1. Diantara 2 sisi yang berasal dari $B(0,6)$, pilih bergerak ke kanan sehingga nilai x_2 bertambah (dengan fungsi tujuan $Z = 3x_1 + 5x_2$ maka memilih bergerak kekanan akan membuat nilai Z naik, sedangkan jika memilih turun maka nilai Z juga turun)

Langkah Penyelesaian 6



2. Berhenti pada garis kendala $3x_1 + 2x_2 = 18$ (Karena terus melaju kekanan akan keluar dari kawasan feasible)
3. Selesaikan titik potong dengan garis kendala yang baru yaitu titik potong antara $2x_2 = 12$ dengan $3x_1 + 2x_2 = 18 \rightarrow$ diperoleh *STSF* baru yaitu $C(2,6)$

Langkah Penyelesaian 7



- Test optimum: Ternyata $C(2,6)$ adalah solusi optimum karena *STSF* pendamping mempunyai solusi lebih jelek (karena dengan fungsi tujuan $Z = 3x_1 + 5x_2$ nilai Z akan turun pada saat menuruti garis kendala $3x_1 + 2x_2 = 18$ atau $x_2 = 9 - 1,5x_1$ sehingga $Z = 3x_1 + 5x_2 = 45 - 4,5x_1$)

Konsep Penyelesaian Simplex 1

- 1. Konsentrasi hanya pada *STSF*.**
Untuk setiap masalah yang mempunyai paling tidak satu solusi optimum, menemukan salah satu solusi hanya perlu menemukan *STSF* terbaik

Konsep Penyelesaian Simplex 2

2. Merupakan algoritma iteratif dengan langkah-langkah berikut:

- a) Inisialisasi: awali dengan memilih *STSF*
- b) Tes optimum: apakah *STSF* terpilih lebih bagus dari *STSF* pendamping
 - i. jika ya, maka *STSF* akhir adalah solusi optimum
 - ii. jika tidak maka lanjutkan ke langkah c)
- c) Iterasi: pilih *STSF* yang lebih bagus dan ulangi langkah b)

3. Jika mungkin awali inisialisasi dengan nilai *STSF* pada titik **sumbu koordinat.**

Konsep Penyelesaian Simplex 3

4. Setiap iterasi untuk memilih *STSF* berikutnya, hanya **ditinjau *STSF* pendampingnya saja**. *STSF* yang lain tidak usah ditinjau.
5. Setiap kali *STSF* berikut terpilih, harus dicari *STSF* pendampingnya. Metoda simplex **tidak akan menghitung nilai *Z***, namun hanya menggunakan ***laju perubahan nilai *Z**** yang terbaik untuk menentukan *STSF* berikutnya yang terpilih.

Konsep Penyelesaian Simplex 4

6. Pada permasalahan *memaksimumkan* nilai positif untuk *laju perbaikan nilai Z* menunjukkan bahwa pada arah tersebut *STSF* pendamping adalah solusi yang lebih baik, sedangkan nilai negatif untuk *laju perbaikan nilai Z* menunjukkan bahwa pada arah tersebut *STSF* pendamping adalah solusi yang lebih buruk.

Konsep Penyelesaian Numerik

- Penyelesaian metoda simplex pada dasarnya menggunakan *sistem persamaan linier*
- Oleh karena itu pertama kali yang harus dilakukan adalah mengubah kendala pertidaksamaan menjadi persamaan
- Perubahan ini dilakukan dengan pengenalan variabel *slack*
- Kendala non-negatif dibiarkan saja karena akan diperlakukan secara lain

Contoh perubahan kendala

- Kendala semula: $x_1 \leq 4$
- Diubah bentuk menjadi $4 - x_1 \geq 0$
- Didefinisikan variable *slack*

$$x_3 = 4 - x_1$$

- Sehingga diperoleh:

$$x_1 + x_3 = 4$$

$$x_3 \geq 0$$

Contoh perubahan kendala

- Kendala semula: $x_1 \geq 4$
- Diubah bentuk menjadi $x_1 - 4 \geq 0$
- Didefinisikan variable *slack*

$$x_3 = x_1 - 4$$

- Sehingga diperoleh:

$$x_1 - x_3 = 4$$

$$x_3 \geq 0$$

Persamaan Simplex

Bentuk Asli

- Maksimumkan
 $Z = 3x_1 + 5x_2$
dengan kendala
 $x_1 \leq 4$
 $2x_2 \leq 12$
 $3x_1 + 2x_2 \leq 18$
dan
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Bentuk Augmented

- Maksimumkan
 $Z = 3x_1 + 5x_2$
dengan kendala
 $x_1 + x_3 = 4$
 $2x_2 + x_4 = 12$
 $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$
dan
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$
 $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$

Terminologi dan Definisi

Metoda Simplex

Solusi *augmented*

- Solusi *augmented* adalah solusi untuk variabel asli (variabel keputusan) yang telah ditambah dengan variabel *slack*
Contoh: solusi (3,2) setara dengan solusi *augmented* (3,2,1,8,5) karena variabel *slack*nya $x_3 = 1$, $x_4 = 8$, $x_5 = 5$ yang diperoleh dari menyelesaikan persamaan kendala (3 persamaan)

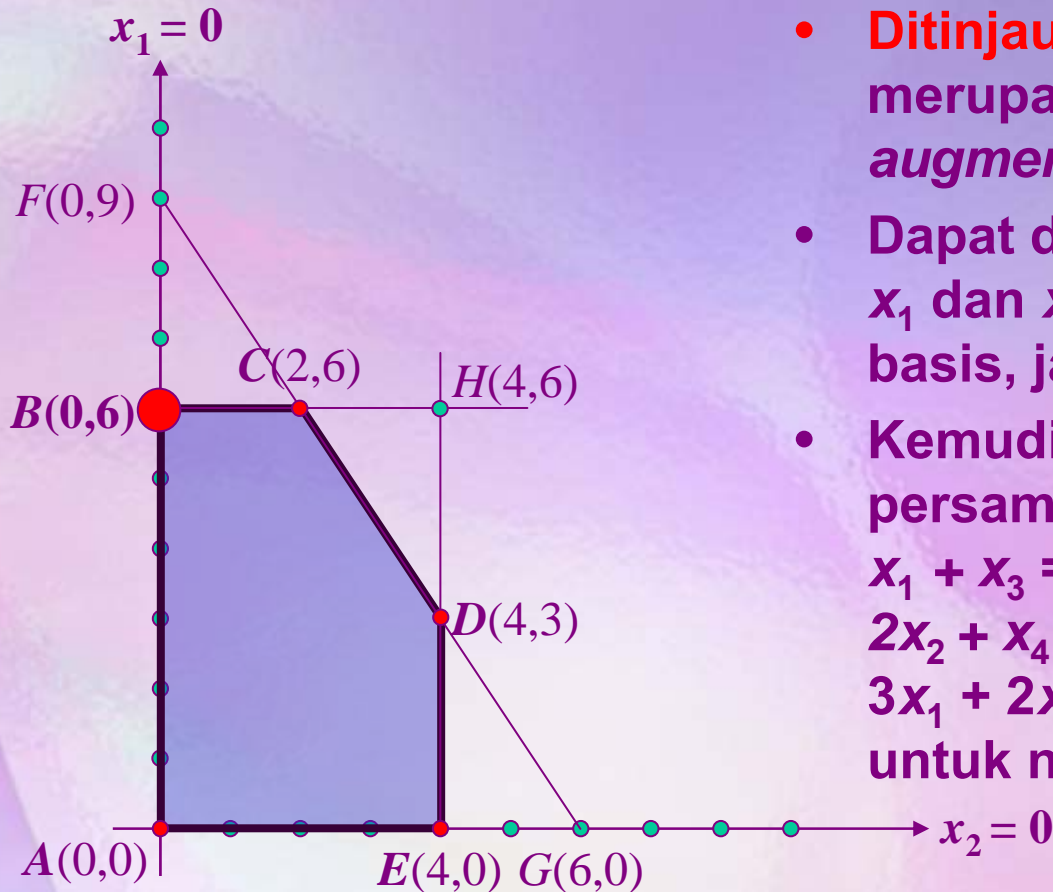
Karakteristik Solusi Basis 1

- 1. Setiap variabel dikelompokkan menjadi variabel basis dan non-basis.**
- 2. Jumlah variabel basis = jumlah fungsi kendala (persamaan).
Jadi jumlah variabel non-basis = jumlah total variabel – jumlah variabel basis.**

Karakteristik Solusi Basis 2

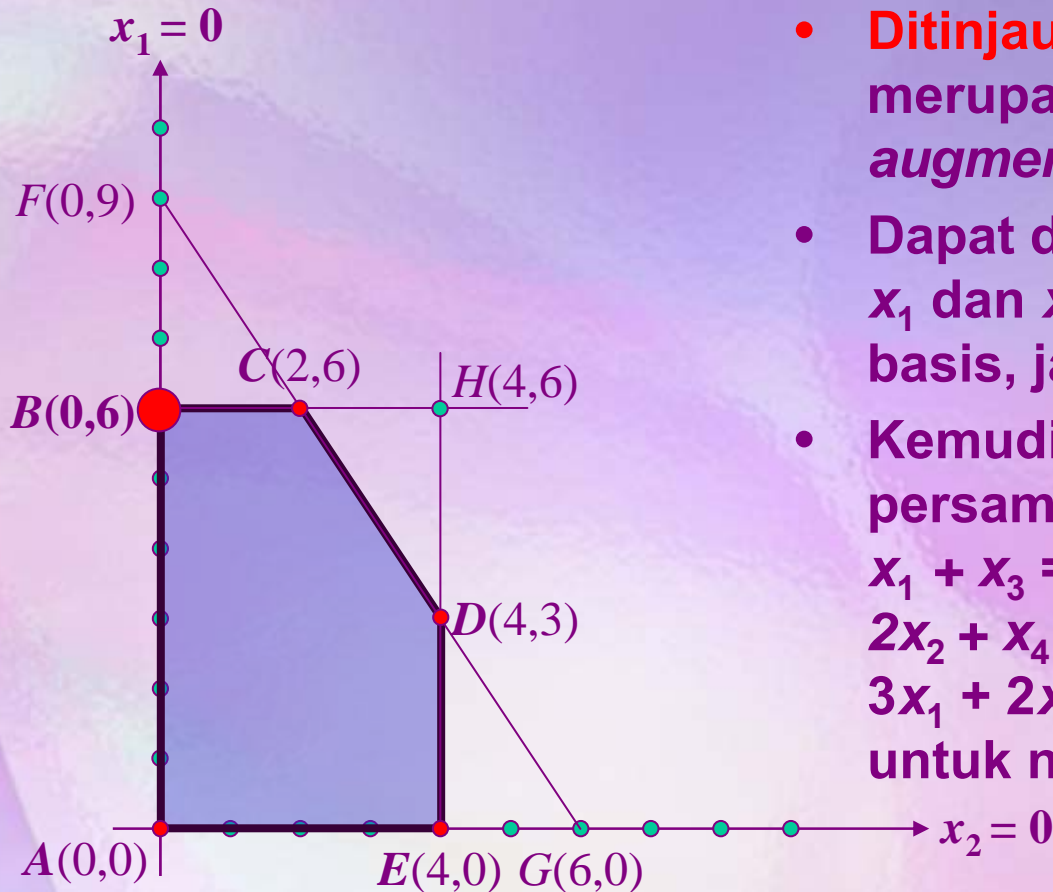
3. Semua variabel non-basis diberi nilai nol.
4. Nilai semua variabel basis dihitung dengan menyelesaikan sistem persamaan linier dari fungsi kendala.
5. Jika nilai setiap variabel basis memenuhi kendala non-negatif, maka solusi basis ini merupakan solusi basis *feasible* (*SBF*).

Ilustrasi 1



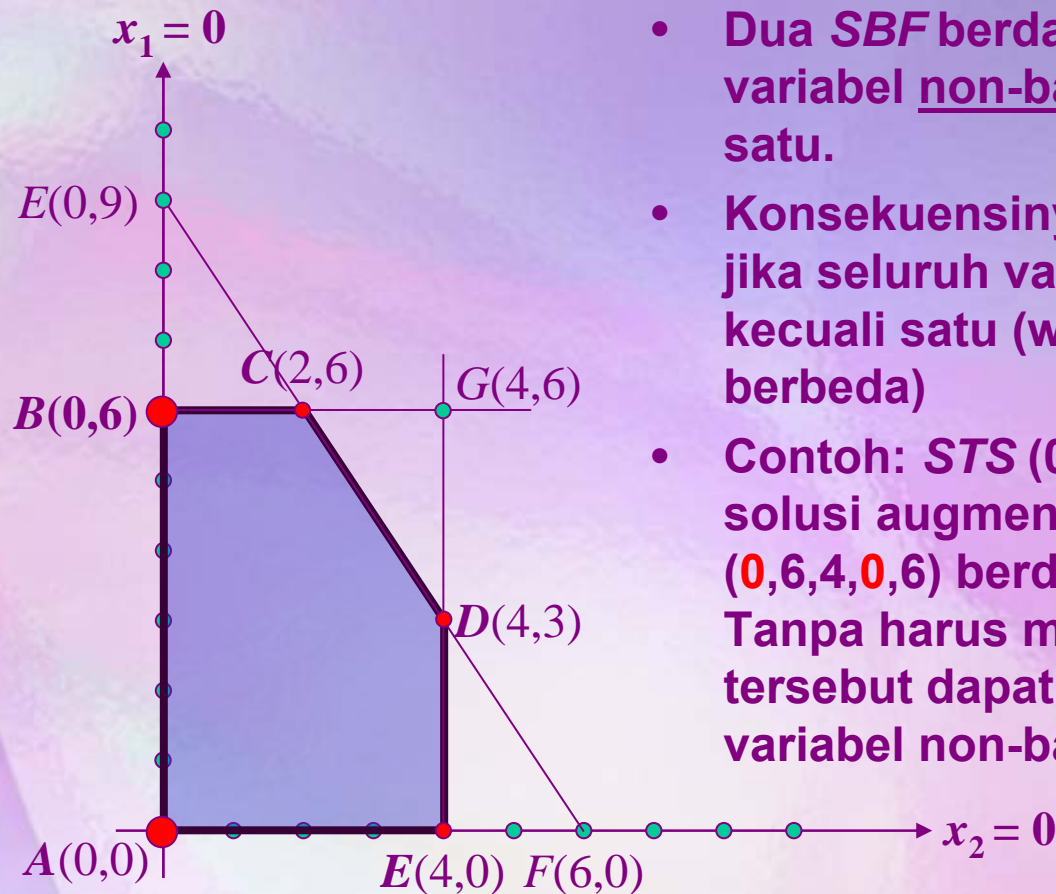
- **Ditinjau** *SBF* $(0,6,4,0,6)$ yang merupakan *STSF* $(0,6)$ *augmented*
- Dapat diinterpretasikan sbb: pilih x_1 dan x_4 sebagai variabel non-basis, jadi nilainya dibuat nol.
- Kemudian selesaikan persamaan:
 $x_1 + x_3 = 4 \quad \rightarrow x_3 = 4$
 $2x_2 + x_4 = 12 \quad \rightarrow x_2 = 6$
 $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \quad \rightarrow x_5 = 6$
untuk nilai $x_1 = 0$ dan $x_4 = 0$

Ilustrasi 2



- **Ditinjau** $SBF(0,0,4,12,18)$ yang merupakan $STSF(0,0)$ *augmented*
- Dapat diinterpretasikan sbb: pilih x_1 dan x_4 sebagai variabel non-basis, jadi nilainya dibuat nol.
- Kemudian selesaikan persamaan:
 $x_1 + x_3 = 4 \quad \rightarrow x_3 = 4$
 $2x_2 + x_4 = 12 \quad \rightarrow x_4 = 12$
 $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \quad \rightarrow x_5 = 18$
untuk nilai $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$

SBF Berdampingan



- Dua *SBF* berdampingan jika seluruh variabel non-basis adalah sama kecuali satu.
- Konsekuensinya dua *SBF* berdampingan jika seluruh variabel basis adalah sama kecuali satu (walaupun nilainya mungkin berbeda)
- Contoh: *STS* (0,0) dan (0,6) berdampingan, solusi augmentednya *SBF* (0,0,4,12,18) dan (0,6,4,0,6) berdampingan
Tanpa harus melihat gambar, kesimpulan tersebut dapat dilihat dari perubahan variabel non-basis (x_1 , x_2) dan (x_1 , x_4)