

Program Dinamik

Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.
Jurusan Teknik Sipil
FT UGM

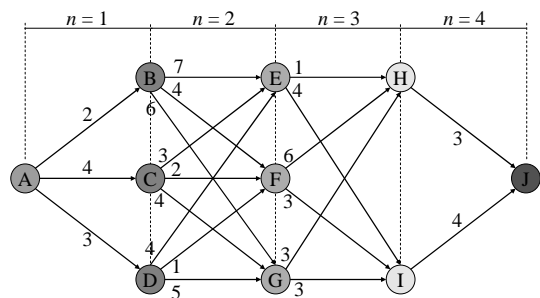
Pendahuluan

- Tidak seperti program linier, Program Dinamik (PD) tidak mempunyai standar formulasi matematik.
- PD lebih merupakan suatu cara umum untuk melakukan optimasi dengan persamaan matematik yang cocok dengan masalah yang dihadapi.
- *Insight* dan *ingenuity* dibutuhkan untuk mengenali penggunaan PD dalam menyelesaikan masalah lapangan.
- Cara terbaik penyampaian PD adalah dengan mengenalkan beberapa permasalahan yang dapat diselesaikan dengan PD.

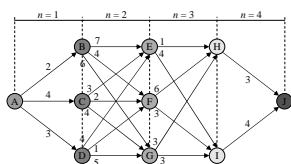
Contoh Jarak Termurah

- Seorang pebisnis akan pergi dari Kota A ke Kota J dengan menggunakan kendaraan umum.
- Banyak kemungkinan jalan yang dapat digunakan dari A → J
- Pebisnis diatas menginginkan perjalanan dari A → J dengan biaya paling murah
- Besar biaya dan rute jalan dari A → J disajikan dalam tayangan berikut.

Biaya dan Rute jalan



Biaya dan Rute jalan



- Kita coba penyelesaian bahwa dalam setiap tahap/rute kita pilih yang biayanya termurah

- Jika hitungan diawali dari A, hasilnya: $A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$ dengan biaya $2+4+3+4$ total 13
- Jika hitungan diawali dari J, hasilnya: $J \leftarrow H \leftarrow E \leftarrow C \leftarrow A$ dengan biaya $3+1+3+4$ total 11
- Cara yang dapat ditempuh adalah *trial & error*

Formulasi 1

- Pilih variabel keputusan x_n ($n = 1,2,3,4$) sebagai kota yang harus ditempuh pada tahap n , sehingga rute seluruhnya adalah $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ dengan $x_1=A$ dan $x_4=J$
- Pilih $f_n(s, x_n)$ sebagai biaya total untuk kebijakan keseluruhan dari tahapan selanjutnya dengan pebisnis sampai pada kondisi s , siap berangkat ke tahap n , dengan memilih x_n sebagai kota tujuan berikut

Formulasi 2

- Pada kondisi s dan tahap n , gunakan x_n^* sebagai sembarang nilai yang meminimumkan $f_n(s, x_n)$, gunakan $f_n^*(s)$ sebagai nilai minimum dari $f_n(s, x_n)$
- $f_n^*(s) = \min f_n(s, x_n) = f_n(s, x_n^*)$

dengan $f_n(s, x_n)$ adalah biaya sekarang (tahap n) + minimum biaya yad (tahap $n+1$ dan selanjutnya) atau

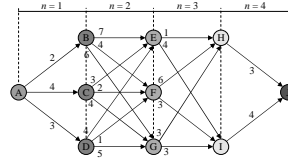
$$f_n(s, x_n) = c_s(x_n) + f_{n+1}^*(x_n)$$

8/24/2003

Jack la Motta

7

Prosedur penyelesaian Tahap 4



- Pada tahap akhir $n = 4$ hasil ditabelkan sbb:

s	$f_4^*(s)$	x_4^*
H	3	J
I	4	J

- Pada tahap akhir $n = 4$, maka perjalanannya hanya ditentukan sepenuhnya oleh kondisi s sekarang (yaitu H atau I) dan tujuan akhir J, sehingga $f_4^*(s) = f_4(s, J) = c_4(J)$

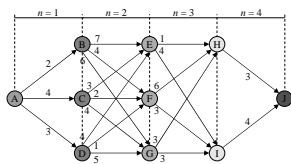
tabel diatas menyajikan fakta bahwa kalau pebisnis sudah sampai di H maupun di I, maka solusi feasible-nya adalah $x_4^* = J$.

8/24/2003

Jack la Motta

8

Tahap 3



- Pada tahap akhir $n = 3$ hasil ditabelkan sbb:

s	$f_3 = c_3 + f_4^*$		$f_3^*(s)$	x_3^*
	H	I		
E	4	8	4	H
F	9	7	7	I
G	6	7	6	H

- Pada tahap $n = 3$, maka perjalanannya perlu melakukan beberapa hitungan. Misalkan dia sudah sampai di kota F, maka dia bisa menuju ke kota H atau I, dengan biaya pada tahap 3 ini adalah $c_3(H) = 6$ atau $c_3(I) = 3$

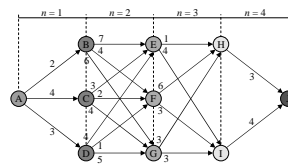
- $E, H \rightarrow 4 = 1 + 3$
- $E, I \rightarrow 8 = 4 + 4$
- $F, H \rightarrow 9 = 6 + 3$
- $F, I \rightarrow 7 = 3 + 4$
- $G, H \rightarrow 6 = 3 + 3$
- $G, I \rightarrow 7 = 3 + 4$

8/24/2003

Jack la Motta

9

Tahap 2



s	$f_2 = c_2 + f_3^*$			$f_2^*(s)$	x_2^*
	E	F	G		
B	11	11	12	11	E, F
C	7	9	10	7	E
D	8	8	11	8	E, F

- $B, E \rightarrow 11 = 7 + 4$
- $B, F \rightarrow 11 = 4 + 7$
- $B, G \rightarrow 12 = 6 + 6$
- $C, E \rightarrow 7 = 3 + 4$
- $C, F \rightarrow 9 = 2 + 7$
- $C, G \rightarrow 10 = 4 + 6$

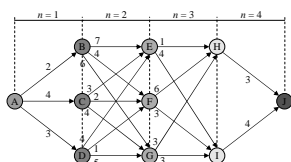
- $D, E \rightarrow 8 = 4 + 4$
- $D, F \rightarrow 8 = 1 + 7$
- $D, G \rightarrow 11 = 5 + 6$
- Bilangan yang terakhir setelah "+" adalah nilai optimum $f_3^*(x_3)$

8/24/2003

Jack la Motta

10

Tahap 1



s	$f_1 = c_1 + f_2^*$			$f_1^*(s)$	x_1^*
	B	C	D		
A	13	11	11	11	C, D

- $A, B \rightarrow 13 = 2 + 11$
- $A, C \rightarrow 11 = 4 + 7$
- $A, D \rightarrow 11 = 3 + 8$
- Dari hasil di atas nilai optimum tercapai yaitu 11

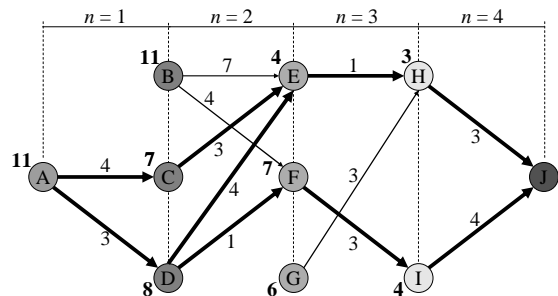
- Lintasan 1: $A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J$
- Lintasan 2: $A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J$
- Lintasan 3: $A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$
- Lintasan tersebut disajikan dalam tayangan berikut.

8/24/2003

Jack la Motta

11

Biaya dan Rute jalan optimum



8/24/2003

Jack la Motta

12

Karakteristik Program Dinamik

1. Permasalahannya dapat dibagi menjadi tahapan dengan keputusan kebijakan pada tiap tahap
2. Tiap tahap mempunyai sejumlah kondisi terkait

8/24/2003

Jack la Motta

13

Karakteristik Program Dinamik

3. Pengaruh keputusan kebijakan pada setiap tahapan adalah transformasi kondisi saat ini kepada sebuah kondisi yang terkait dengan awal dari tahapan berikutnya
4. Prosedur penyelesaian dirancang untuk mendapatkan kebijakan optimum untuk seluruh tahapan yaitu dengan membuat kebijakan optimum untuk setiap tahap pada setiap kemungkinan kondisi

8/24/2003

Jack la Motta

14

Karakteristik Program Dinamik

5. Pada suatu kondisi, sebuah kebijakan optimum untuk tahapan selanjutnya tidak terkait oleh kebijakan optimum dari tahapan sebelumnya. Jadi keputusan optimum yang diambil hanya tergantung pada kondisi sekarang bukan dari bagaimana kita sampai pada kondisi sekarang. Inilah yang dinamai prinsip optimum dari Program Dinamik.

8/24/2003

Jack la Motta

15

Karakteristik Program Dinamik

6. Prosedur penyelesaian mulai dengan mendapatkan solusi optimum untuk tahap terakhir.
7. Hubungan rekursif untuk memperoleh solusi optimum untuk tahap n , dengan solusi optimum untuk tahap $n+1$ telah diketahui. Rumus tersebut menjadi:

$$f_n^*(s) = \min_{x_n} \{c_s(x_n) + f_{n+1}^*(x_{n+1})\}$$

8/24/2003

Jack la Motta

16

Alokasi air dengan DP

x_j	$R_1(x_1)$	$R_2(x_2)$	$R_3(x_3)$
0	0,0	0,0	0,0
1	-0,5	6,5	-6,9
2	3,0	10,1	0
3	6,6	10,9	6,3
4	10,0	9,6	11,5
5	13,1	7,0	15,6

- Sebuah kawasan akan membagi air kepada 3 pengguna, dengan keuntungan bersih masing-masing pengguna disajikan dalam tabel.

8/24/2003

Jack la Motta

17

Formulasi Alokasi Air

- Alokasi air agar keuntungan bersih total maksimum dirumuskan:

$$f_j(s_j) = \max_{x_j} [R_j(x_j) + f_{j+1}(s_j - x_j)]$$

$$0 \leq x_j \leq s_j$$

- Karena sifatnya yang rekursif, maka hitungan paling mudah dimulai dari tahap (j) akhir
- Prosedur lengkap cara penyelesaian lebih mudah kalau dijelaskan dengan tabel pada tayangan berikut.

8/24/2003

Jack la Motta

18

Jawaban: Tahap Akhir

OPTIMUM NET BENEFIT COMPUTATION
USING DYNAMIC PROGRAMMING
(BACKWARD METHOD)

THESE ARE INTERMEDIATE RESULTS

```

=====
                        NB3(X3)
State 3 ----- Max.Solution:
      X:0  1  2  3  4  5  NB  X's
-----
0  0.0  -  -  -  -  -  0.00  0
1  0.0 -6.9  -  -  -  -  0.00  0
2  0.0 -6.9  0.0  -  -  -  0.00  0,2
3  0.0 -6.9  0.0  6.3  -  -  6.30  3
4  0.0 -6.9  0.0  6.3  11.5  -  11.50  4
5  0.0 -6.9  0.0  6.3  11.5  15.6  15.60  5
=====
    
```

8/24/2003

Jack la Motta

19

Jawaban: Tahap Kedua

```

=====
Stage 2: NB2(X2) + OptNB3(State2 - X2)
-----
State  X:0  1  2  3  4  5  Max.Solution:
-----
0  0.0  -  -  -  -  -  0.00  0
1  0.0  0.0  -  -  -  -  6.50  1
   0.0  6.5  -  -  -  -
2  0.0  0.0  0.0  -  -  -  10.10  2
   0.0  6.5  10.1  -  -  -
3  6.3  0.0  0.0  0.0  -  -  10.90  3
   6.3  6.5  10.1  10.9  -  -
4  11.5  6.3  0.0  0.0  0.0  -  12.80  1
   11.5  12.8  10.1  10.9  9.6  -
5  15.6  11.5  6.3  0.0  0.0  0.0  18.00  1
   15.6  18.0  16.4  10.9  9.6  7.0
=====
    
```

8/24/2003

Jack la Motta

20

Jawaban: Tahap Pertama

```

=====
Stage 1: NB1(X1) + OptNB2(State1 - X1)
-----
State  X:0  1  2  3  4  5  NB1
-----
5  18.0  12.8  10.9  10.1  6.5  0.0
   18.0  12.3  13.9  16.7  16.5  13.1  18.00  0
=====
    
```

THESE ARE FINAL RESULTS

```

=====
The optimum value is 18.00000
=====
The alternative optimal solutions
[ X(Optimum) ] at each stage are
-----
Stage : 1  2  3
-----
0  1  4
=====
Note: The unit of X(Optimum) is 1.00
    
```

8/24/2003

Jack la Motta

21

Program Dinamik

- Untuk kepentingan kuliah, maka telah disediakan Program Dinamik sederhana yang dikembangkan:

```

*****
*           Djoko Luknanto           *
*           Research Engineer         *
*           Hydraulic Laboratory       *
*           Civil Engineering Department *
*           College of Engineering    *
*           Gadjah Mada University   *
*           Tahun 1992                *
*****
    
```

- Hasil-hasil diatas adalah output dari program ini.

8/24/2003

Jack la Motta

22