

Dasar-dasar Optimasi

Optimasi Linier

diambil dari buku

Introduction to Operations Research, Sixth Edition, Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman, McGraw-Hill, Inc., International Editions, Industrial Engineering Series, 1995

KPB Tiga P3A

- **Sebuah satuan wilayah irigasi mempunyai tiga organisasi P3A (Persatuan Petani Pemakai Air)**
- **Wilayah ini dikelola secara bersama oleh sebuah KPB (Kantor Pengelolaan Bersama)**
- **KPB ini akan merencanakan produksi pertanian yang akan ditanam untuk tahun mendatang**

Ketersediaan Sumberdaya

- **Produksi pertanian terkait dibatasi oleh ketersediaan lahan dan air irigasi yang disediakan oleh pemerintah**

| P3A | Lahan (ha) | Alokasi air (10^3 m^3) |
|------------|-------------------|--|
| 1 | 400 | 600 |
| 2 | 600 | 800 |
| 3 | 300 | 375 |

Produksi Pertanian

- **Produksi pertanian yang cocok untuk daerah ini adalah cabai, jagung, padi.**
- **Ketiga jenis tanaman ini berbeda kebutuhan airnya maupun keuntungan bersih tiap ha.**
- **Departemen Pertanian menetapkan kuota luas lahan untuk masing-masing jenis tanaman.**

Keterbatasan sumberdaya

| Tanaman | Luas Lahan (ha) | Kebutuhan air (10^3 m^3) | Keuntungan bersih (juta/ha) |
|---------|-----------------|--------------------------------------|-----------------------------|
| Padi | 600 | 3 | 1000 |
| Jagung | 500 | 2 | 750 |
| Cabai | 325 | 1 | 250 |

- Karena ketersediaan air terbatas, maka KPB tidak akan dapat mengairi seluruh lahan dengan air yang tersedia

Aturan Kelompok

- Dari aspek sosial-kemasyarakatan, untuk menjaga *persamaan* antar P3A, maka telah disepakati bahwa dalam masing-masing P3A daerah yang diusahakan harus sama prosentasenya terhadap tanah yang tersedia.
- Contoh: jika P3A 1 mengolah 200 ha dari luas tersedia 400 ha, maka P3A 2 harus mendapat 300 ha dari yang tersedia 600 ha, dan maka P3A 2 harus mendapat 150 ha dari yang tersedia 300 ha.
- Dalam masing P3A kombinasi tanaman yang boleh ditanam tidak dibatasi.

Tujuan

- **KPB harus menentukan tanaman apa dan berapa luasnya untuk masing-masing P3A sehingga:**
 - ❖ **keuntungan total ketiga P3A maksimum**
 - ❖ **memenuhi setiap kendala yang dijumpai di lapangan**

Perancangan

- **Variabel keputusan:**
Luas lahan untuk masing-masing tanaman dan P3A

| Tanaman | Luas Lahan (ha) | | |
|---------|-----------------|-------|-------|
| | P3A 1 | P3A 2 | P3A 3 |
| Padi | x_1 | x_2 | x_3 |
| Jagung | x_4 | x_5 | x_6 |
| Cabai | x_7 | x_8 | x_8 |

Formulasi

- Keuntungan bersih padi
 $1000 (x_1+x_2+x_3)$
- Keuntungan bersih jagung
 $750 (x_4+x_5+x_6)$
- Keuntungan bersih cabai
 $250 (x_7+x_8+x_9)$
- Fungsi Tujuan

$$\text{Max } Z = 1000 (x_1+x_2+x_3) + 750 (x_4+x_5+x_6) + 250 (x_7+x_8+x_9)$$

Kendala

- Lahan (ha) tersedia tiap P3A:
 $x_1 + x_4 + x_7 \leq 400$
 $x_2 + x_5 + x_8 \leq 600$
 $x_3 + x_6 + x_9 \leq 300$
- Alokasi air (10^3 m^3) untuk tiap P3A:
 $3x_1 + 2x_4 + x_7 \leq 600$
 $3x_2 + 2x_5 + x_8 \leq 800$
 $3x_3 + 2x_6 + x_9 \leq 375$

Kendala

- Kuota luas (ha) masing-masing tanaman:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 600$$

$$x_4 + x_5 + x_6 \leq 500$$

$$x_7 + x_8 + x_9 \leq 325$$

- *Persamaan* untuk tiap P3A:

$$\frac{x_1 + x_4 + x_7}{400} = \frac{x_2 + x_5 + x_8}{600} = \frac{x_3 + x_6 + x_9}{300}$$

Kendala

- Non-negatif: $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, \dots, 9$
- Kendala *persamaan* harus diubah menjadi:
$$3(x_1 + x_4 + x_7) = 2(x_2 + x_5 + x_8)$$
$$4(x_3 + x_6 + x_9) = 2(x_2 + x_5 + x_8)$$

Formulasi Lengkap

- **Max $Z = 1000 (x_1 + x_2 + x_3) + 750 (x_4 + x_5 + x_6) + 250 (x_7 + x_8 + x_9)$**
- **kendala:**
 1. $x_1 + x_4 + x_7 \leq 400$
 2. $x_2 + x_5 + x_8 \leq 600$
 3. $x_3 + x_6 + x_9 \leq 300$
 4. $3x_1 + 2x_4 + x_7 \leq 600$
 5. $3x_2 + 2x_5 + x_8 \leq 800$
 6. $3x_3 + 2x_6 + x_9 \leq 375$
 7. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 600$
 8. $x_4 + x_5 + x_6 \leq 500$
 9. $x_7 + x_8 + x_9 \leq 325$
 10. $3(x_1 + x_4 + x_7) = 2(x_2 + x_5 + x_8)$
 11. $4(x_3 + x_6 + x_9) = 2(x_2 + x_5 + x_8)$
- **catatan: kendala 2 dan 3 sudah dipenuhi oleh kendala 10 dan 11**

Formulasi Lengkap

- $\text{Max } Z = 1000 (x_1 + x_2 + x_3) + 750 (x_4 + x_5 + x_6) + 250 (x_7 + x_8 + x_9)$
- kendala:
 1. $x_1 + x_4 + x_7 \leq 400$
 2. $3x_1 + 2x_4 + x_7 \leq 600$
 3. $3x_2 + 2x_5 + x_8 \leq 800$
 4. $3x_3 + 2x_6 + x_9 \leq 375$
 5. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 600$
 6. $x_4 + x_5 + x_6 \leq 500$
 7. $x_7 + x_8 + x_9 \leq 325$
 8. $3x_1 + 3x_4 + 3x_7 - 2x_2 - 2x_5 - 2x_8 = 0$
 9. $2x_3 + 2x_6 + 2x_9 - x_2 - x_5 - x_8 = 0$
 10. $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, \dots, 9$

Formulasi dengan Lindo 1

```
! Contoh 1: Regional Planning, IOR p.48
! Maksimumkan keuntungan bersih, dengan X adalah luas tanah
! yang ditanami satu jenis tanaman di daerah pengairan tertentu
!
Max 1000 X1 + 1000 X2 + 1000 X3 +
    750 X4 + 750 X5 + 750 X6 +
    250 X7 + 250 X8 + 250 X9
st
!
! 1. Tanah yang dapat ditanami di setiap daerah pengairan
  X1 + X4 + X7 <= 400
! X2 + X5 + X8 <= 600 tidak digunakan karena ada
! X3 + X6 + X9 <= 300 kendala No.4
!
! 2. Jatah air di setiap daerah pengairan
3 X1 + 2 X4 + X7 <= 600
3 X2 + 2 X5 + X8 <= 800
3 X3 + 2 X6 + X9 <= 375
!
!3. Jumlah luas setiap jenis tanaman
  X1 + X2 + X3 <= 600
  X4 + X5 + X6 <= 500
  X7 + X8 + X9 <= 325
!
!4. Persamaan proporsi daerah yang ditanami
3 X1 + 3 X4 + 3 X7 - 2 X2 - 2 X5 - 2 X8 = 0
  X2 + X5 + X8 - 2 X3 - 2 X6 - 2 X9 = 0
! 4 X3 + 4 X6 + 4 X9 - 3 X1 - 3 X4 - 3 X7 = 0 "redundant constraint"
End
```

Formulasi dengan Lindo 2

Max 1000 X1 + 1000 X2 + 1000 X3 +
750 X4 + 750 X5 + 750 X6 +
250 X7 + 250 X8 + 250 X9

st

$$X1 + X4 + X7 \leq 400$$

$$3 X1 + 2 X4 + X7 \leq 600$$

$$3 X2 + 2 X5 + X8 \leq 800$$

$$3 X3 + 2 X6 + X9 \leq 375$$

$$X1 + X2 + X3 \leq 600$$

$$X4 + X5 + X6 \leq 500$$

$$X7 + X8 + X9 \leq 325$$

$$3 X1 + 3 X4 + 3 X7 - 2 X2 - 2 X5 - 2 X8 = 0$$

$$X2 + X5 + X8 - 2 X3 - 2 X6 - 2 X9 = 0$$

End

Hasil dengan Lindo

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
    1)      633333.3
VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
  X1      133.333328      0.000000
  X2      100.000000      0.000000
  X3       25.000000      0.000000
  X4      100.000000      0.000000
  X5      250.000000      0.000000
  X6      150.000000      0.000000
  X7         0.000000      83.333336
  X8         0.000000      83.333336
  X9         0.000000      83.333336
ROW  SLACK OR SURPLUS  DUAL PRICES
  2)      166.666672      0.000000
  3)         0.000000      333.333344
  4)         0.000000      333.333344
  5)         0.000000      333.333344
  6)      341.666656      0.000000
  7)         0.000000      83.333336
  8)      325.000000      0.000000
  9)         0.000000      0.000000
 10)         0.000000      0.000000
```