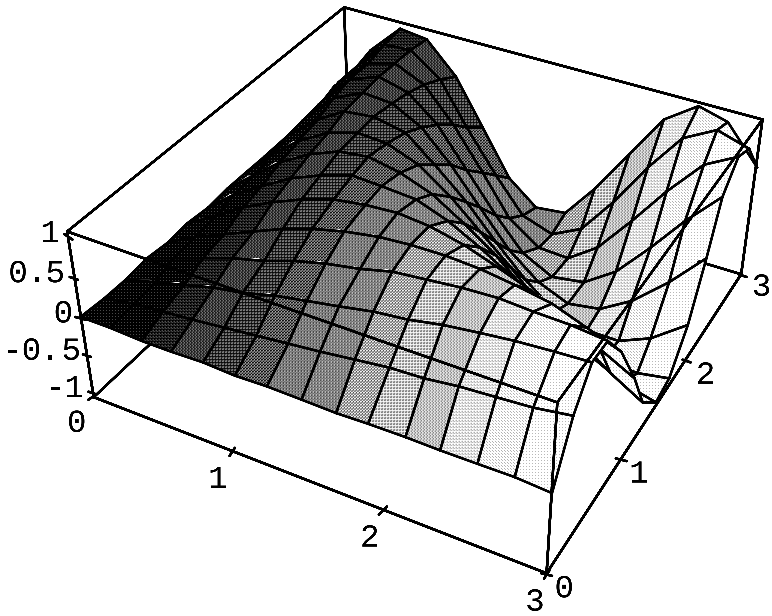
Pengantar OPTIMASI

NON LINIER



oleh

Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.
Peneliti di Laboratorium Hidraulika
Jurusan Teknik Sipil
Fakultas Teknik
Universitas Gadjah Mada

Mei 2000

PRAKATA

Dalam kehidupan sehari-hari, baik disadari maupun tidak, orang selalu melakukan optimasi untuk memenuhi kebutuhannya. Optimasi yang dilakukan oleh masyarakat awam lebih banyak dilandasi oleh intuisi daripada teori optimasi. Dalam bidang kerekayasaan optimasi sangat dibutuhkan, sering kita dihadapkan pada persoalan mencari penyelesaian termurah dengan memenuhi segala kendala yang ada.

Untuk memiliki teknologi optimasi, seorang perencana perlu mendalami teknik-teknik optimasi baik yang sederhana untuk mendapatkan pengertian mendasar maupun yang canggih untuk menyelesaikan permasalahan nyata di lapangan. Topik mengenai optimasi di negara-negara berkembang merupakan bidang keahlian tersendiri yang membutuhkan waktu yang tidak sedikit untuk mendalaminya. Riset-riset mengenai optimasi masih terus berlanjut sampai sekarang sehingga banyak temuan teknik baru yang lebih canggih dan efisien.

Bahan penataran ini dimaksudkan untuk memberikan pengenalan dan penyegaran mengenai teknik optimasi, khususnya optimasi nonlinier. Pada kuliah ini untuk topik optimasi nonlinier tersedia waktu tujuh kali pertemuan masing-masing 100 menit. Dalam waktu sesingkat itu penyusun berusaha untuk mengenalkan optimasi nonlinier secara garis besar seefisien mungkin, sehingga ide dasar mengenai optimasi nonlinier dapat dipahami. Beberapa teknik numeris akan dijelaskan pula sehingga berguna untuk penyelesaian permasalahan di lapangan.

Bahan kuliah ini merupakan terjemahan bebas dari beberapa pustaka yang digunakan untuk menyusun bahan kuliah ini. Penyusun berharap bahan penataran ini berguna. Kritik membangun sangatlah diharapkan agar bahan kuliah makin sempurna.

Yogyakarta, Mei 2000
Penyusun

Djoko Luknanto

DAFTAR ISI

halaman

namafile: D:\My Documents\Publikasi\Optimasi\Non-linier\Nonlinier 2003.doc (676 Kb)

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

1. METODE OPTIMASI ANALITIS

Suatu permasalahan optimasi disebut nonlinier jika fungsi tujuan dan kendalanya mempunyai bentuk nonlinier pada salah satu atau keduanya, contohnya adalah sebagai berikut:

$$\text{Max } f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 - x_1^{\,2} + 9x_2 - x_2^{\,2} + 10x_3 - 2x_3^{\,2} - 0{,}5x_2x_3 \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \text{kendala} \quad & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ & 2x_1 + 4x_2 + x_3 \le 20 \\ & x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian permasalahan optimasi nonlinier — seperti contoh di atas — secara analitis akan dijelaskan secara rinci dalam bab berikut.

1.1 Satu Variabel tanpa Kendala

Optimasi nonlinier ditinjau dari pandangan matematis adalah topik lanjutan dan secara konsepsual sulit. Dibutuhkan pengetahuan aktif mengenai kalkulus diferensial dan aljabar linier. Dalam optimasi nonlinier terdapat kemampuan untuk menangani masalah sulit yaitu fungsi tujuan nonlinier yang tidak mempunyai nilai minimum yang unik serta mempunyai daerah penyelesaian dengan batas nonlinier ataupun tidak konvex. Secara umum tidak terdapat teknik penyelesaian yang terbaik, tetapi ada beberapa teknik yang mempunyai masa depan cerah dibandingkan dengan yang lain. Banyak teknik penyelesaian optimasi nonlinier yang hanya efisien untuk menyelesaikan masalah yang mempunyai struktur matematis tertentu. Hampir semua teknik optimasi nonlinier modern mengandalkan pada algoritma numeris untuk mendapatkan jawabannya.

Sangatlah tidak mungkin untuk mendiskusikan teknik-teknik optimasi lanjutan dengan rinci karena diperlukannya pengetahuan matematis canggih dalam waktu yang singkat. Pada penataran hanya akan dikenalkan konsep-konsep dasar pembentuk algoritma-algoritma modern beserta penggunaannya secara sederhana. Dalam kesederhanaannya ini dimaksudkan agar konsep dasarnya lebih mudah difahami.

Untuk memulai topik optimasi nonlinier akan dibahas teknik optimasi pada fungsi-funsi satu dimensi, karena teknik ini merupakan satu kesatuan dalam hampir setiap teknik optimasi nonlinier multi variabel.

Dimisalkan x adalah variabel penentu dan $f(x)$ adalah fungsi tujuan dari suatu masalah. Metode optimasi menyelesaikan masalah

$$\underset{x}{\text{Maximumkan}}\ f(x) \text{ atau } \underset{x}{\text{Minimumkan}}\ f(x) \qquad (1.2)$$

Untuk menyelesaikan permasalahan seperti tertera dalam Pers.(1.2) dapat dipakai kalkulus diferensial yang dinyatakan seperti di bawah ini:

Teorema:

Misalkan f adalah fungsi yang menerus dalam interval tertutup $[a,b]$ dan dapat diderivasikan pada interval terbuka (a,b).

(i) Jika $f'(x) > 0$ untuk seluruh x dalam (a,b), maka f adalah menanjak pada $[a,b]$.

(ii) Jika $f'(x) < 0$ untuk seluruh x dalam (a,b), maka f adalah menurun pada $[a,b]$.

Test derivasi pertama:

Misalkan f adalah fungsi yang menerus dalam interval tertutup $[a,b]$ dan dapat diderivasikan pada interval terbuka (a,b) kecuali mungkin di titik c yang berada didalam (a,b).

(i) Jika $f'(x) > 0$ untuk $a < x < c$ dan $f'(x) < 0$ untuk $c < x < b$, maka $f(c)$ adalah sebuah maximum lokal dari f.

(ii) Jika $f'(x) < 0$ untuk $a < x < c$ dan $f'(x) > 0$ untuk $c < x < b$, maka $f(c)$ adalah sebuah lokal minimum dari f.

(iii) Jika $f'(x) < 0$ atau $f'(x) > 0$ untuk setiap x dalam (a,b) kecuali $x = c$, maka $f(c)$ BUKAN sebuah nilai ekstrim.

Test derivasi kedua:

Misalkan f adalah fungsi yang dapat diderivasikan pada interval terbuka yang berisi titik c dan $f'(c) = 0$,

(i) Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah sebuah maximum lokal dari f.

(ii) Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah sebuah minimum lokal dari f.

Agar terdapat gambaran yang lebih jelas bagaimana optimasi satu variabel/dimensi dilaksanakan, maka disajikan satu contoh pemakaiannya.

Contoh 1.1

Sebuah perusahaan catering (makanan ringan yang menyediakan konsumsi untuk suatu penataran di JTS FT UGM) berusaha mengurangi pengeluaran untuk keperluan pembungkus. Bungkus tersebut terbuat dari kertas karton seperti tampak pada Gambar 1.1. Keempat pojoknya akan dipotong segi empat samasisi sedemikian rupa sehingga volumenya menjadi maksimum.

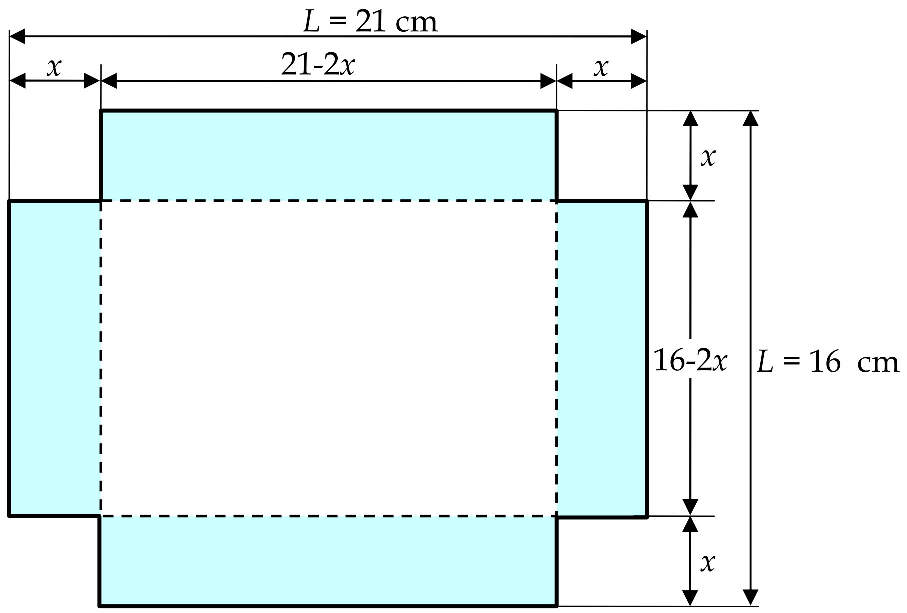
Penyelesaian:

Sebagai peserta penataran yang baik, maka kita akan menyelesaikan tantangan di atas dengan metode kalkulus seperti yang telah dijelaskan di atas. Volume pembungkus dapat dinyatakan sebagai

$$V = x(16-2x)(21-2x) = 2(168x - 37x^2 + 2x^3)$$

Persamaan di atas merupakan persamaan volume sebagai fungsi dari x. Untuk mendapatkan nilai volume yang maksimum atau minimum, kita harus mengadakan beberapa perhitungan. Derivasi V terhadap x menghasilkan

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx} &= 2(168 - 74x + 6x^2)\\ &= 4(84 - 37x + 3x^2)\\ &= 4(3x-28)(x-3)\end{aligned}$$



Gambar 1.1. Bungkus makanan ringan pada penataran di JTS FT UGM

Dari persamaan di atas nilai x yang mungkin mengakibatkan volumenya menjadi ekstrim adalah $\frac{28}{3}$ dan 3. Nilai $x = \frac{28}{3}$ adalah tidak mungkin (kenapa ya …?), jadi nilai x yang dipakai adalah 3. Pada Gambar 1.2 disajikan plot dari volume sebagai fungsi dari x beserta derivasi pertama dan keduanya.

Untuk mengetahui apakah volume menjadi maksimum atau minimum kita gunakan Test Derivasi kedua sbb:

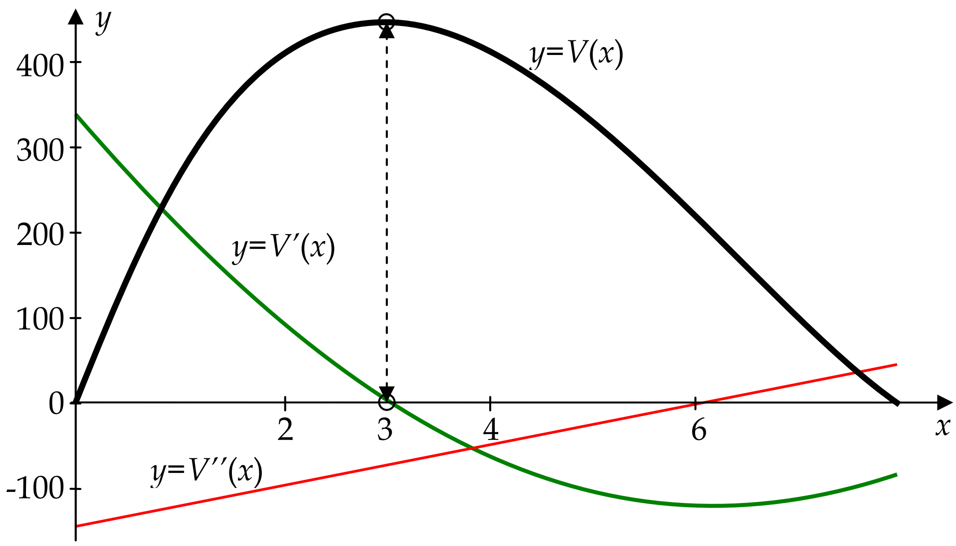
$$\frac{d^2V}{dx^2} = 2(-74 + 12x) = 4(6x - 37)$$

Substitusi $x = 3$ kedalam persamaan di atas menghasilkan

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 4(18 - 37) = -76 < 0$$

jadi V mempunyai nilai maksimum untuk nilai $x = 3$.

Sekarang harus kita check apakah volume menjadi maksimum pada nilai ekstrim dari x. Tampak dari Gambar 1.1, bahwa $0 \le x \le 8$, karena untuk nilai $x = 0$ maupun $x = 8$ nilai $V = 0$, maka dapat ditarik kesimpulan bahwa volume maksimum tidak terjadi pada daerah batas. Jadi untuk menghemat bahan, maka pembungkus makanan ringan di atas harus dipotong berbentuk segi empat pada keempat pojoknya dengan sisi-sisinya adalah 3 satuan.



Gambar 1.2. Grafik dari $V(x)$, $V'(x)$, dan $V''(x)$

Secara formal dalam teknik optimasi persoalan di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$\text{Maximumkan } f = 2(168x - 37x^2 + 2x^3)$$
$$0 \leq x \leq 8$$

Dari contoh di atas tampak bahwa dengan cara analitis kalkulus diferensial nilai x yang memberikan nilai f maximum dapat dicari tanpa mengetahui nilai dari f itu sendiri.

Untuk melengkapi teorema optimasi nonlinier satu variabel yang telah dijelaskan di atas disajikan teorema yang dapat digunakan untuk menentukan titik-titik ekstrem dari suatu fungsi satu variabel.

Teorema:

Misalkan $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$, tetapi $f^{(n)}(c)$ • 0. Maka $f(c)$ adalah:

(i) nilai minimum dari $f(x)$, jika $f^{(n)}(c) > 0$ dan n adalah bilangan genap,

(ii) nilai maximum dari $f(x)$, jika $f^{(n)}(c) < 0$ dan n adalah bilangan genap,

(iii) bukan minimum dan maximum jika n adalah bilangan gasal.

Contoh 1.2

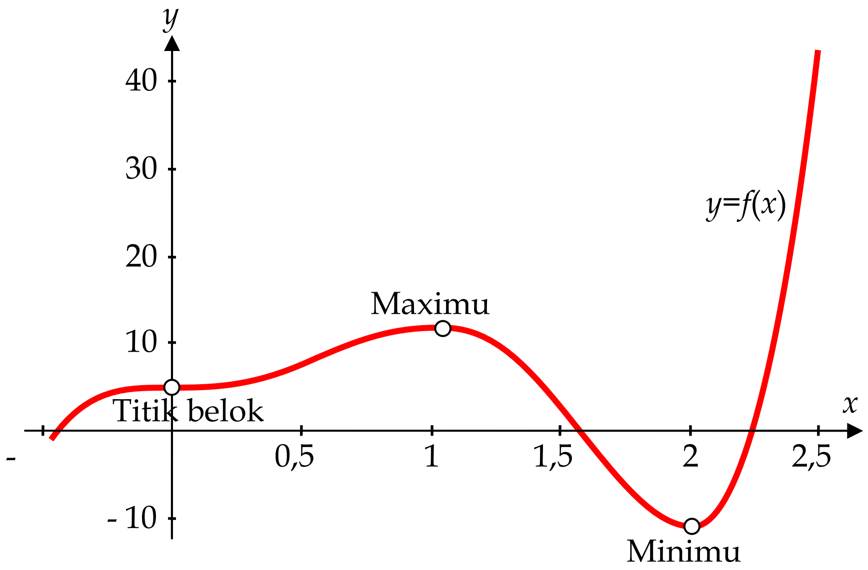
Tentukan maximum dan minimum dari fungsi di bawah ini (lihat Gambar 1.3):

$$f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5$$

Penyelesaiannya:

Karena $f'(x) = 60(x^4 - 3x^3 + 2x^2) = 60x^2(x-1)(x-2)$, maka $f'(x) = 0$, pada x = 0, x = 1 dan x = 2.

Derivasi kedua adalah $f''(x) = 60(4x^3 - 9x^2 + 4x)$



Gambar 1.3. Plot dari $f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5$

Pada x = 1, $f''(x)$ = -60, sehingga x = 1 adalah sebuah maximum relatif yang memberikan nilai $f_{max} = f(x{=}1) = 12$

Pada x = 2, $f''(x)$ = 240, sehingga x = 2 adalah sebuah minimum relatif yang memberikan nilai $f_{min} = f(x{=}2) = -11$

Pada $x = 0$, $f''(x) = 0$, sehingga harus diadakan penyelidikan pada derivasi berikutnya: $f^{(3)} = 60(12x^2–18x+4) = 240$ pada $x = 0$. Karena $f^{(3)} \neq 0$ pada $x = 0$, maka $x = 0$ bukanlah sebuah maximum maupun minimum, $x = 0$ adalah sebuah titik belok.

1.2 Multi Variabel Tanpa Kendala

Cara analitis yang diterapkan pada permasalahan optimasi satu variabel dapat pula diterapkan kepada permasalahan multi variabel. Secara umum teknik yang digunakan pada optimasi satu dimensi dapat digunakan dalam optimasi multi variabel. Untuk memberikan padanan dengan bab di atas dan untuk memberikan kemudahan dan kejelasan dalam penulisan persamaan, akan didefinisikan beberapa simbol yang akan dipakai selanjutnya.

(i) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ akan ditulis sebagai $f(\mathbf{X})$ dengan $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^t$

(ii) $f(\mathbf{X}^*) = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$

(iii) $\nabla f(\mathbf{X}^*) = \dfrac{\partial}{\partial x_j} f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ untuk $j = 1,2,\ldots,n$

(iv) $\nabla f(\mathbf{X}^*) = \mathbf{C}$ setara dengan $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$

Teorema:

Jika $f(\mathbf{X})$ mempunyai sebuah titik ekstrem (minimum maupun maximum) pada $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ dan jika derivasi pertama dari $f(\mathbf{X})$ mempunyai nilai pada titik $\mathbf{X}^*$, maka $\nabla f(\mathbf{X}^*) = \mathbf{0}$

PERHATIAN: Kebalikannya belum tentu benar yaitu jika $\nabla f(\mathbf{X}^*) = \mathbf{0}$ maka $\mathbf{X}^*$ adalah titik ekstrem.

Teorema:

Titik $\mathbf{X}^*$ disebut titik maksimum lokal dari $f(\mathbf{X})$ jika dan hanya jika:

(i) $\nabla f(\mathbf{X}^*) = \mathbf{0}$

(ii) $\mathbf{H}(\mathbf{X}^*) < \mathbf{0}$ definit negatif dengan **H** = matrik Hessian yang didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix} \text{ dengan } h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

H adalah definit negatif jika dan hanya jika $(-1)^j|\mathbf{H}|^j > 0$ untuk $j = 1,2,\ldots,n$

dengan $|\mathbf{H}|^j = \det\begin{vmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{j1} & \cdots & h_{jj} \end{vmatrix}$, sehingga

$$h_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} < 0$$

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{vmatrix} > 0 \ldots, \text{ dst, } (-1)^j|\mathbf{H}|^j > 0$$

Teorema:

Titik $\mathbf{X}^*$ disebut titik minimum lokal dari $f(\mathbf{X})$ jika dan hanya jika:

(i) $\nabla f(\mathbf{X}^*) = \mathbf{0}$

(ii) $\mathbf{H}(\mathbf{X}^*) > \mathbf{0}$ definit positif atau $|\mathbf{H}|^j > 0$ untuk $j = 1,2,\ldots,n$, sehingga

$$h_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{vmatrix} > 0 \ldots,\ \text{dst},\quad |\mathbf{H}|^{j} > 0$$

Tabel 1.1. Syarat untuk Maximum Lokal

Keadaan yang dipenuhi	$\boldsymbol{X}^*$ adalah maximum lokal
1. $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$ 2. $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}^*) < \mathbf{0}$ (definit negatif)	PASTI
1. $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$ 2. $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}^*) \leq \mathbf{0}$	MUNGKIN
1. $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$ 2. $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}^*)$ tak tentu	MUSTAHIL

Tabel 1.2. Syarat untuk Minimum Lokal

Keadaan yang dipenuhi	$\boldsymbol{X}^*$ adalah minimum lokal
1. $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$ 2. $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}^*) > \mathbf{0}$ (definit positif)	PASTI
1. $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$ 2. $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}^*) \geq \mathbf{0}$	MUNGKIN
1. $\nabla f(\boldsymbol{X}^*) = \mathbf{0}$ 2. $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}^*)$ tak tentu	MUSTAHIL

Contoh 1.3

Untuk mendemonstrasikan teknik umum untuk mendapatkan titik-titik ekstrem dari suatu fungsi dipakai sebuah contoh fungsi sebagai berikut:

$$f(x_1, x_2) = x_1^{3} + x_2^{3} + 2x_1^{2} + 4x_2^{2} + 6$$

Titik-titik ekstrem harus memenuhi syarat:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^{2} + 4x_1 = x_1(3x_1 + 4) = 0$$

dan

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2^{2} + 8x_2 = x_2(3x_2 + 8) = 0$$

Persamaan di atas dipenuhi oleh titik-titik

(0, 0); (0, –8/3); (–4/3, 0); dan (–4/3, –8/3)

Untuk mengetahui titik yang mana yang maximum dan yang mana yang minimum, harus diselidiki matrik Hessiannya. Derivasi kedua dari f adalah:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{2}} = 6x_1 + 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^{2}} = 6x_2 + 8,\ \text{dan}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

Jadi matrik Hessiannya menjadi

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 6x_1 + 4 & 0 \\ 0 & 6x_2 + 8 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\mathbf{H}_1 = [6x_1 + 4]$$

dan

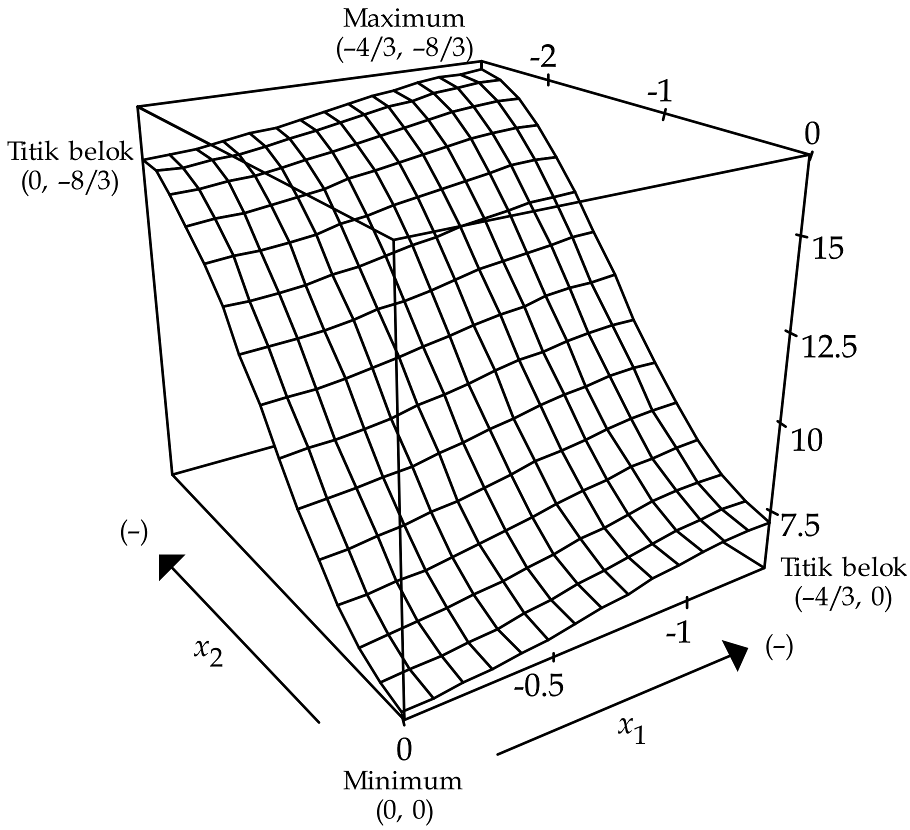
$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 6x_1 + 4 & 0 \\ 0 & 6x_2 + 8 \end{bmatrix}$$

Nilai matrik Hessian untuk masing-masing titik-titik ekstrem disajikan di bawah ini.

(x_1, x_2)	Matrix H	$\mathbf{H}_1$	$\mathbf{H}_2$	Sifat **H**	Sifat (x_1, x_2)	$f(x_1, x_2)$
(0, 0)	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$	+4	+32	Definit positip	Minimum	6

(0, –8/3)	$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$	+4	–32	Tak tentu	Titik belok	418/27
(–4/3, 0)	$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$	–4	–32	Tak tentu	Titik belok	194/27
(–4/3, –8/3)	$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$	–4	+32	Definit negatif	Maximum	50/3

Grafik $f(\mathbf{X})$ dalam ruang tiga-dimensi disajikan dalam Gambar 1.4. Hasil hitungan di atas diperkuat dengan visualisasi yang terlihat pada Gambar 1.4.



Gambar 1.4. Plot dari $f(x_1, x_2) = x_1^{\,3} + x_2^{\,3} + 2x_1^{\,2} + 4x_2^{\,2} + 6$

namafile: D:\My Documents\Publikasi\Optimasi\Non-linier\Nonlinier 2003.doc (676 Kb)

1.3 Multi Variabel dengan Kendala Persamaan

Pada bab ini akan didiskusikan teknik optimasi multi variabel dengan kendala persamaan yang mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

Minimumkan $f = f(\mathbf{X})$ (1.3)

kendala $g_j(\mathbf{X}) = 0$, dengan $j = 1, 2, \ldots, m$ (1.4)

dengan $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^t$

disini $m \leq n$, jika terjadi bahwa $m > n$, maka biasanya tidak dapat diselesaikan.

Tidak seluruh teknik optimasi yang terdapat dalam pustaka akan diterangkan disini, tetapi hanya metode pengali Lagrange saja akan dibahas. Hal ini dipilih dengan pertimbangan bahwa penyelesaian optimasi secara analitis jarang dipakai pada permasalahan di lapangan yang sangat komplek. Biasanya metode yang digunakan pada saat sekarang adalah metode numeris. Oleh karena itu pada bab optimasi secara analitis ini hanya dimaksudkan untuk memberikan dasar-dasar pengertian optimasi yang disertai dengan contoh-contoh sederhana. Metode pengali Lagrange dipilih karena prinsip kerjanya sederhana dan mudah dimengerti.

Metode pengali Lagrange dapat dipakai untuk menyelesaikan permasalahan optimasi yang dirumuskan dalam Pers.(1.3) dan (1.4). Metode ini dimulai dengan pembentukan fungsi Lagrange yang didefinisikan sebagai:

$$L(\mathbf{X}, \lambda) = f(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{X}) \tag{1.5}$$

Teorema:

Syarat perlu bagi sebuah fungsi $f(\boldsymbol{X})$ dengan kendala $g_j(\boldsymbol{X}) = 0$, dengan $j = 1, 2, \ldots, m$ agar mempunyai minimum relatif pada titik $\boldsymbol{X}^*$ adalah **derivasi parsial pertama** dari fungsi Lagrange-nya yang didefinisikan sebagai $L = L(x_1, x_2, \ldots, x_n,$

λ_1, λ_2, …, λ_m) terhadap setiap argumennya mempunyai nilai **nol**.

Teorema:

Syarat harus bagi sebuah fungsi $f(\mathbf{X})$ agar mempunyai minimum (atau maximum) relatif pada titik **X*** adalah jika fungsi kuadrat, ***Q***, yang didefinisikan sebagai

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \tag{1.6}$$

dievaluasi pada **X** = **X*** harus definit positif (atau negatif) untuk setiap nilai $d\mathbf{X}$ yang memenuhi semua kendala.

Syarat perlu agar $Q = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ menjadi definit positif (atau negatif) untuk setiap variasi nilai $d\mathbf{X}$ adalah setiap akar dari polinomial, z_i, yang didapat dari determinan persamaan di bawah ini harus positif (atau negatif).

$$\begin{vmatrix} (L_{11}-z) & L_{12} & L_{13} & \cdots & L_{1n} & g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{m1} \\ L_{21} & (L_{22}-z) & L_{23} & \cdots & L_{2n} & g_{12} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \cdots & (L_{nn}-z) & g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & \cdots & g_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & \cdots & g_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & g_{m3} & \cdots & g_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.7}$$

dengan $L_{ij} = \frac{\partial^2 L(\mathbf{X}^*, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j}$ dan $g_{ij} = \frac{\partial g_i(\mathbf{X}^*)}{\partial x_j}$

Contoh 1.4

Sebuah perusahaan pelumas ingin membuat kaleng pelumas dari seng. Kaleng berbentuk silinder dengan bahan yang terpakai seluas

$A_0 = 24\pi$. Berapa maximum volume kaleng yang dapat dibuat dari bahan yang tersedia?

Penyelesaian:

Jika r dan h adalah radius dan tinggi dari kaleng tersebut, maka permasalahan di atas dapat dinyatakan sebagai:

Maximumkan $f(r,h) = \pi r^2 h$ dengan kendala $2\pi r^2 + 2\pi rh = A_0 = 24\pi$

Fungsi Lagrange-nya adalah $L(r,h,\lambda) = \pi r^2 h + \lambda(2\pi r^2 + 2\pi rh - A_0)$, dan syarat perlu untuk memaksimumkan f adalah:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 2\pi rh + \lambda(4\pi r + 2\pi h) = 0 \qquad \text{(E.1)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \pi r^2 + 2\pi\lambda r = 0 \qquad \text{(E.2)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2\pi r^2 + 2\pi rh - A_0 = 0 \qquad \text{(E.3)}$$

Dari Pers.(E.1) dan (E.2) didapat:

$$\lambda = -\frac{rh}{2r+h} = -\frac{r}{2} \text{ atau } r = \frac{h}{2} \qquad \text{(E.4)}$$

dan Pers.(E.3) dan (E.4) menghasilkan:

$$r^* = \sqrt{\frac{A_0}{6\pi}}, \; h^* = \sqrt{\frac{2A_0}{3\pi}} \text{ dan } \lambda^* = -\sqrt{\frac{A_0}{24\pi}}$$

Nilai di atas memberikan nilai maximum dari $f^* = \sqrt{\frac{A_0^{\,3}}{54\pi}}$

Jika $A_0 = 24\pi$, penyelesaian optimum menghasilkan $r^* = 2$, $h^* = 4$, $\lambda^* = -1$, dan $f^* = 16\pi$.

Untuk melihat apakah hasil di atas memberikan nilai maximum dari f, kita check syarat pada Pers.(1.7).

$$L_{11} = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial r^2}\right|_{(\mathbf{X}^*,\lambda^*)} = 2\pi h^* + 4\pi\lambda^* = 4\pi$$

$$L_{12} = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial r \partial h}\right|_{(\mathbf{X}^*,\lambda^*)} = L_{21} = 2\pi r^* + 2\pi\lambda^* = 2\pi$$

$$L_{22} = \left.\frac{\partial^2 L}{\partial h^2}\right|_{(\mathbf{X}^*,\lambda^*)} = 0$$

$$g_{11} = \left.\frac{\partial g_1}{\partial r}\right|_{(\mathbf{X}^*,\lambda^*)} = 4\pi r^* + 2\pi h^* = 16\pi$$

$$g_{12} = \left.\frac{\partial g_1}{\partial h}\right|_{(\mathbf{X}^*,\lambda^*)} = 2\pi r^* = 4\pi$$

Sehingga Pers.(1.7) menjadi

$$\begin{vmatrix} (L_{11}-z) & L_{12} & g_{11} \\ L_{21} & (L_{22}-z) & g_{12} \\ g_{11} & g_{12} & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ atau } \begin{vmatrix} (4\pi - z) & 2\pi & 16\pi \\ 2\pi & (0-z) & 4\pi \\ 16\pi & 4\pi & 0 \end{vmatrix} = 0$$

menjadi

$$(4\pi - z)\begin{vmatrix} (0-z) & 4\pi \\ 4\pi & 0 \end{vmatrix} - 2\pi \begin{vmatrix} 2\pi & 4\pi \\ 16\pi & 0 \end{vmatrix} + 16\pi \begin{vmatrix} 2\pi & (0-z) \\ 16\pi & 4\pi \end{vmatrix} = 0$$

$$(4\pi - z)(-16\pi^2) - 2\pi(-64\pi^2) + 16\pi(8\pi^2 + 16\pi z) = 0$$

$$-64\pi^3 + 16\pi^2 z + 128\pi^3 + 128\pi^3 + 256\pi^2 z = 0$$

atau $272\,\pi^2 z + 192\,\pi^3 = 0$, sehingga $z = -\frac{12}{17}\,\pi$

Karena nilai z adalah negatif, maka penyelesaian di atas yaitu $r^* = 2$, $h^* = 4$, $\lambda^* = -1$ adalah penyelesaian maximum dengan nilai $f^* = 16\pi$.

Arti dari pengali Lagrange. Pengali Lagrange mempunyai arti secara fisik yang menarik untuk dibahas sebagai penutup dalam bab ini. Untuk membahas ini maka dimisalkan terdapat permasalahan optimasi dengan satu kendala sebagai berikut:

Minimumkan $f = f(\mathbf{X})$ (1.8)

kendala $g(\mathbf{X}) = b$ (1.9)

Fungsi Lagrange-nya adalah

$$L(\mathbf{X},\lambda) = f(\mathbf{X}) + \lambda\big(b - g(\mathbf{X})\big) \tag{1.10}$$

Syarat perlu untuk penyelesaian diatas adalah

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n \text{ dan} \tag{1.11a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \tag{1.11b}$$

Pers.(1.10) dan (1.11) menghasilkan:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.12a}$$

$$b - g(\mathbf{X}) = 0 \text{ atau } b = g \tag{1.12b}$$

Dari Pers.(1.12a) didapat:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i = 0 \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n$$

atau $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i = 0$$

atau $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$$

atau $$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i}_{df} = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i}_{dg} \tag{1.13}$$

Pers.(1.13) dan (1.12b) menghasilkan hasil yang final yaitu

$$df = \lambda\, db$$

atau $$df^* = \lambda^*\, db \tag{1.14}$$

Dari Pers (1.14) dapat ditarik kesimpulan bahwa: pada penyelesaian optimum, perubahan fungsi tujuan, *f*, berbanding lurus dengan perubahan kendala, *b* dengan faktor sebesar pengali Lagrange, λ.

1.4 Multi Variabel dengan Kendala Pertidak-samaan

Pada bab ini akan didiskusikan teknik optimasi multi variabel dengan kendala pertidak-samaan yang mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

Minimumkan $f = f(\mathbf{X})$ dengan $\mathbf{X} = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n\}^t$ (1.15)

kendala $g_j(\mathbf{X}) \le 0$, dengan $j = 1, 2, \ldots, m$

Kunci dari penanganan permasalahan di atas adalah merubah kendala pertidak-samaan menjadi persamaan dengan menambah variabel *slack*. Jadi permasalahan optimasi di atas dapat ditulis kembali sebagai:

Minimumkan $f = f(\mathbf{X})$ dengan $\mathbf{X} = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n\}^t$

kendala $G_j(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = g_j(\mathbf{X}) + y_j^2 = 0$, dengan $j = 1, 2, \ldots, m$ (1.16)

dengan $\mathbf{Y} = \{ y_1, y_2, \ldots, y_m\}^t$ adalah vektor variabel *slack*.

Permasalahan ini dapat diselesaikan metode pengali Lagrange. Untuk itu, dibentuk fungsi Lagrange sebagai berikut:

$$L(\mathbf{X},\mathbf{Y},\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j G_j(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \tag{1.17}$$

Syarat perlu untuk suatu penyelesaian optimum Pers.(1.17) diperoleh dari penyelesaian sistem persamaan di bawah ini.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\boldsymbol{\lambda}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{X}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{g_j}{\partial x_i}(\mathbf{X}) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\boldsymbol{\lambda}) = G_j(\mathbf{X},\mathbf{Y},\boldsymbol{\lambda}) = g_j(\mathbf{X}) + y_j^2 = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_j}(\mathbf{X},\mathbf{Y},\boldsymbol{\lambda}) = 2\lambda_j y_j = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m \tag{1.20}$$

Teknik yang dijelaskan pada bab sebelumnya dapat dipakai untuk menyelesaikan sistem persamaan Pers.(1.18) s/d (1.20).

Syarat perlu agar persamaan optimasi, Pers.(1.15), mencapai titik minimumnya dapat pula dicari dengan syarat Kuhn-Tucker. Syarat ini perlu tetapi secara umum bukan merupakan syarat cukup untuk mencapai minimum. Tetapi untuk problema jenis konvex, syarat Kuhn-Tucker menjadi syarat perlu dan cukup untuk sebuah minimum global.

Syarat Kuhn-Tucker untuk Pers.(1.15):

Minimumkan $f = f(\mathbf{X})$ dengan $\mathbf{X} = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n\}^t$ (1.15)

kendala $g_j(\mathbf{X}) \le 0$, dengan $j = 1, 2, \ldots, m$

dapat dinyatakan dalam satu set pernyataan sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{g_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.21a}$$

$$\lambda_j g_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{1.21b}$$

$$g_j \le 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{1.21c}$$

$$\lambda_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m \tag{1.21d}$$

PERHATIAN:

- Jika permasalahannya adalah memaksimumkan {<u>bukan</u> meminimumkan seperti pada Pers.(1.15)}, maka $\lambda_j \le 0$ dalam Pers.(1.21d).
- Jika kendalanya adalah $g_j \ge 0$, maka $\lambda_j \le 0$ dalam Pers.(1.21d).
- Jika permasalahannya adalah memaksimumkan dan jika kendalanya adalah $g_j \ge 0$, maka $\lambda_j \ge 0$ dalam Pers.(1.21d).

Contoh 1.5

Sebuah perusahaan pembuat komputer mendapat kontrak untuk menyediakan 50 unit komputer pada akhir bulan pertama, 50 unit komputer pada akhir bulan kedua, dan 50 unit komputer pada akhir bulan ketiga. Biaya produksi x buah komputer tiap bulannya adalah x^2. Perusahaan ini dapat memproduksi komputer lebih dari yang dipesan dan menyimpannya di gudang untuk diserahkan pada bulan berikutnya. Biaya gudang adalah sebesar 20 satuan harga untuk tiap komputer yang disimpan dari bulan yang lalu kebulan berikutnya. Diandaikan bahwa pada permulaan pesanan di gudang tidak terdapat persediaan komputer. Tentukan jumlah produksi komputer tiap bulannya agar biaya pembuatannya minimum.

Penyelesaian:

Dimisalkan *a*, *b*, dan *c* adalah produksi komputer selama tiga bulan berurutan, maka biaya total yang harus diminimumkan adalah

Biaya total = biaya produksi + biaya gudang

atau

$$f(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 + 20(a-50) + 20(a+b-100)$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 40a + 20b - 3000$$

dengan kendala:

$$g_1(a, b, c) = a - 50 \geq 0$$
$$g_2(a, b, c) = a + b - 100 \geq 0$$
$$g_3(a, b, c) = a + b + c - 150 \geq 0$$

Syarat Kuhn-Tucker–nya dapat dinyatakan sbb:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \lambda_3 \frac{\partial g_3}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

atau

$$2a + 40 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad \text{(E.1)}$$
$$2b + 20 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad \text{(E.2)}$$
$$2c + \lambda_3 = 0 \qquad \text{(E.3)}$$

$$\lambda_j g_j = 0 \quad j = 1, 2, 3$$

atau

$$\lambda_1(a - 50) = 0 \qquad \text{(E.4)}$$
$$\lambda_2(a + b - 100) = 0 \qquad \text{(E.5)}$$
$$\lambda_3 (a + b + c - 150) = 0 \qquad \text{(E.6)}$$

$$g_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$$

atau

$$a - 50 \geq 0 \qquad \text{(E.7)}$$
$$a + b - 100 \geq 0 \qquad \text{(E.8)}$$

$$a + b + c - 150 \geq 0 \tag{E.9}$$

$$\lambda_j \leq 0 \quad j = 1, 2, 3$$

atau

$$\lambda_1 \leq 0 \tag{E.10}$$
$$\lambda_2 \leq 0 \tag{E.11}$$
$$\lambda_3 \leq 0 \tag{E.12}$$

Dari Pers.(E.4) tampak bahwa $\lambda_1 = 0$ atau $a = 50$.

Kasus (i): Jika $\lambda_1 = 0$

Pers.(E.1) dan (E.3) memberikan

$$\left.\begin{aligned} c &= -0{,}5\lambda_3 \\ b &= -10 - 0{,}5\lambda_2 - 0{,}5\lambda_3 \\ c &= -20 - 0{,}5\lambda_2 - 0{,}5\lambda_3 \end{aligned}\right\} \tag{E.13}$$

Substitusi Pers.(E.13) kedalam Pers.(E.5) dan (E.6), didapat

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2(-130 - \lambda_2 - \lambda_3) = 0 \\ \lambda_3(-180 - \lambda_2 - 1{,}5\lambda_3) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{E.14}$$

Empat kemungkinan penyelesaian Pers.(E.14) adalah

(1) $\lambda_2 = 0$, $-180 - \lambda_2 - 1{,}5\lambda_3 = 0$ atau $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -120$

Jadi $a = 40$, $b = 50$, $c = 60$

Penyelesaian ini bertentangan dengan Pers.(E.7) dan (E.8).

(2) $-130 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$, $\lambda_3 = 0$, atau $\lambda_2 = -130$, $\lambda_3 = 0$

Jadi $a = 45$, $b = 55$, $c = 0$

Penyelesaian ini bertentangan dengan Pers.(E.7) dan (E.9).

(3) $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$

Jadi $a = -20$, $b = -10$, $c = 0$

Penyelesaian ini bertentangan dengan Pers.(E.7) dan (E.9).

(4) $-130 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$, $-180 - \lambda_2 - 1{,}5\lambda_3 = 0$ atau $\lambda_2 = -30$, $\lambda_3 = -100$

Jadi $a = 45$, $b = 55$, $c = 50$

Penyelesaian ini bertentangan dengan Pers.(E.7).

Kasus (ii): Jika a = 50

Pers.(E.1) dan (E.3) memberikan

$$\left.\begin{aligned} \lambda_3 &= -2c \\ \lambda_2 &= -20 - 2b - \lambda_3 = -20 - 2b + 2c \\ \lambda_1 &= -40 - 2a - \lambda_2 - \lambda_3 = -20 - 2a + 2b = -120 + 2b \end{aligned}\right\} \tag{E.15}$$

Substitusi Pers.(E.15) kedalam Pers.(E.5) dan (E.6) menghasilkan

$$\left.\begin{aligned} (-20 - 2b + 2c)(a + b - 100) &= 0 \\ -2c(a + b + c - 150) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{E.16}$$

Dari Pers.(E.16) diperoleh empat kemungkinan penyelesaian

(1) $-20 - 20b + 2c = 0$, $a + b + c - 150 = 0$

Jadi $a = 50$, $b = 45$, $c = 55$

Penyelesaian ini bertentangan dari (E.8).

(2) $-20 - 20b + 2c = 0$, $-2c = 0$

Jadi $a = 50$, $b = -10$, $c = 0$

Penyelesaian ini bertentangan dari (E.8) dan (E.9).

(3) $a + b - 100 = 0$, $-2c = 0$

Jadi $a = 50$, $b = 50$, $c = 0$

Penyelesaian ini bertentangan dari (E.9).

(4) $a + b - 100 = 0$, $a + b + c - 150 = 0$

Jadi $a = 50$, $b = 50$, $c = 50$

Penyelesaian terakhir inilah yang memenuhi setiap persamaan. Nilai dari λ_1, λ_2, dan λ_3 sesuai dengan penyelesaian di atas adalah

$\lambda_1 = -20$, $\lambda_2 = -20$, $\lambda_3 = -100$

2. TEORI OPTIMASI NUMERIS SATU DIMENSI

Telah kita lihat dalam Bab 1, bahwa untuk mencari nilai optimum suatu fungsi tujuan dihitung terlebih dahulu titik optimumnya. Setelah titik optimum diketahui, maka nilai optimum fungsi tujuannya dihitung dari nilai fungsi di titik optimum. Jadi nilai fungsi tujuan dihitung terakhir.

Pada metode numeris langkah hitungan yang dilakukan justru kebalikan dari metode analitis. Pada metode ini letak titik optimum ditentukan dengan menyelidiki nilai fungsinya. Titik yang mempunyai nilai fungsi terbesar atau terkecil dibandingkan dengan nilai fungsi pada titik-titik yang lain itulah titik optimumnya. Jadi letak titik optimum dihitung terakhir.

Dalam bab ini akan dibahas metode numeris dalam optimasi satu variabel–tanpa kendala, yang secara garis besar dibagi sebagai berikut.

A. Teknik Eliminasi
   1. Pencarian bebas
      (i) Dengan langkah tetap
      (ii) Dengan percepatan langkah
   2. Pencarian lengkap
   3. Pencarian dikotomi
   4. Pencarian Fibonacci
   5. Pencarian Rasio Emas

B. Teknik Pendekatan
      Newton (Kuadratik)

Metode numeris yang akan dibahas disini hanya berlaku untuk suatu fungsi unimodal. **Fungsi unimodal** yaitu suatu fungsi yang hanya mempunyai satu puncak (maximum) atau satu lembah (minimum). Jika ternyata fungsi tujuan yang akan dioptimasikan bersifat multimodal (berpuncak banyak) pada interval yang menjadi perhatian, maka interval tersebut harus dibagi menjadi interval-interval yang lebih kecil sedemikian rupa sehingga pada interval-interval kecil tersebut fungsi tujuan bersifat unimodal.

2.1 Teknik Eliminasi

2.1.1 Pencarian bebas

Teknik eliminasi pencarian bebas adalah teknik yang paling sederhana dan mudah difahami, tetapi tidak efisien ditinjau dari segi numeris. Teknik ini dibagi menjadi dua metode yang berbeda dalam pemilihan langkah hitungan.

2.1.1.1 Dengan langkah tetap.

Pendekatan paling dasar dari permasalahan optimasi adalah penggunaan langkah tetap berangkat dari titik tebakan pertama dan bergerak kearah yang dikehendaki. Diandaikan permasalahan yang dihadapi adalah minimisasi suatu fungsi tujuan, maka teknik ini dapat dijabarkan sebagai berikut:

1. Mulai dengan tebakan titik pertama, misalkan x_1.
2. Hitung $f_1 = f(x_1)$.
3. Pilih sebuah ukuran langkah misalkan s, hitung $x_2 = x_1 + s$.
4. Hitung $f_2 = f(x_2)$.
5. Jika $f_2 < f_1$, maka pencarian dapat diteruskan kearah ini sepanjang titik-titik x_3, x_4, … dengan melakukan tes pada setiap dua titik yang terakhir. Cara ini ditempuh terus sampai dicapai suatu keadaan dimana $x_i = x_1 + (i - 1)s$ memperlihatkan kenaikan pada nilai fungsinya.
6. Pencarian dihentikan pada x_i, dan x_i atau x_{i-1} dapat dianggap sebagai titik optimum.
7. Jika $f_2 > f_1$, pencarian harus dilakukan kearah yang berlawanan yaitu sepanjang titik-titik x_{-2}, x_{-3}, … dengan $x_{-j} = x_1 - (j - 1)s$.
8. Jika $f_2 = f_1$, maka titik optimum terletak diantara titik-titik x_1 danx_2.
9. Jika ternyata f_2 dan f_{-2} mempunyai nilai lebih besar dari f_1, maka titik optimum terletak diantara titik-titik x_{-2} dan x_2.

Contoh 2.1

Cari maximum dari fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{untuk } x \le 2 \\ -x + 3 & \text{untuk } x > 2 \end{cases}$$

dengan menggunakan teknik pencarian bebas dengan $x_1 = -1$ dan $s = 0.4$.

Penyelesaian:
Penyelesaiannya dilakukan dengan tabel di bawah ini:

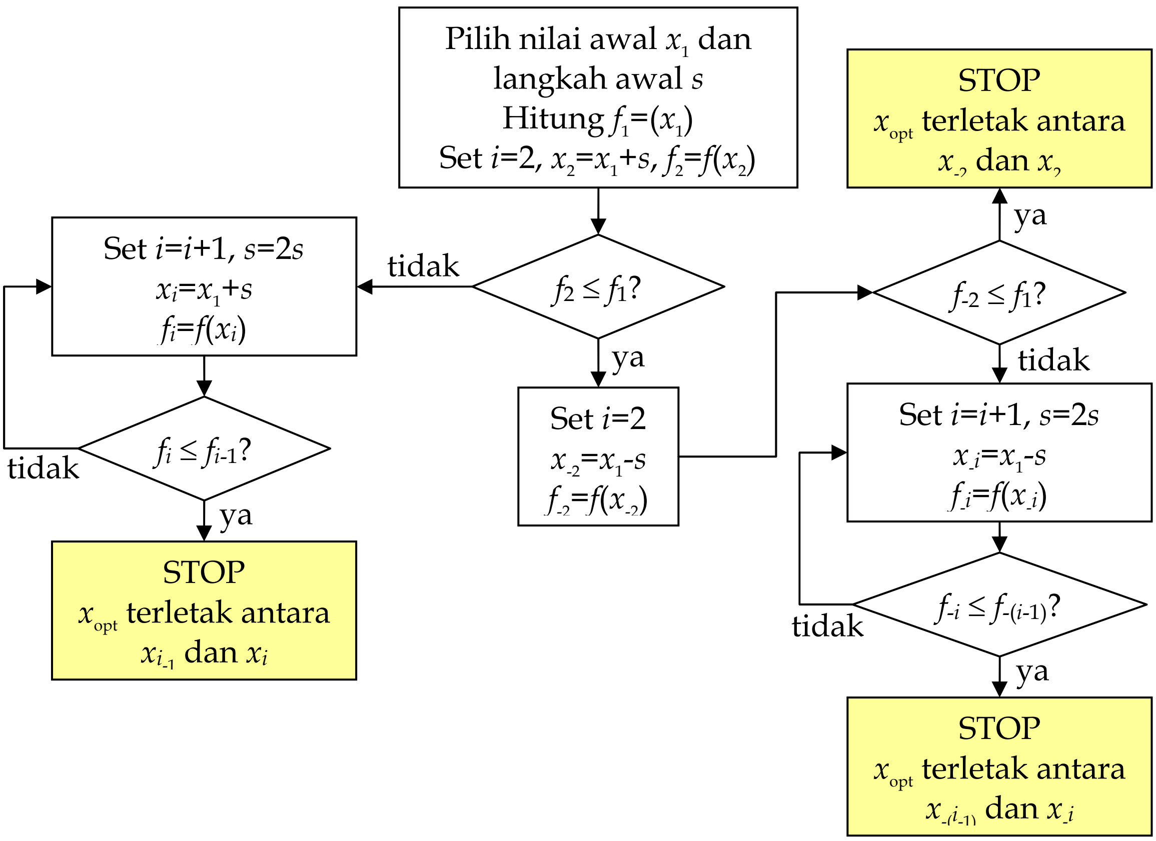
i	x_i	f_i	$f_i \le f_{i-1}$
1	–1.0	–0.5	–
2	–1.4	–0.7	ya
			balik arah
3	–0.6	–0.3	tidak
4	–0.2	–0.1	tidak
5	0.2	0.1	tidak
6	0.6	0.3	tidak
7	1.0	0.5	tidak
8	1.4	0.7	tidak
9	1.8	0.9	tidak
10	2.2	0.8	ya

Dari tabel di atas tampak pada $i = 2$ terjadi pembalikan arah pencarian karena nilai fungsinya menurun. Pada arah yang sebaliknya nilai fungsi bertambah besar, sampai $i = 10$, nilainya menurun. Jadi nilai optimum terjadi diantara $i = 9$ dan $i = 10$ atau dapat dianggap bahwa nilai x optimum adalah x_9 atau x_{10}.

2.1.1.2 Dengan percepatan langkah.

Walaupun pencarian dengan langkah tetap sangat sederhana dan mudah, tetapi sangat tidak efisien. Sebagai ilustrasi ketidak-efisienannya diandaikan suatu pencarian dimulai dari nilai $x_1 = -1$ dan $s = 0.1$ sedangkan x optimum mempunyai nilai 50000.00, maka untuk dapat menyelesaikannya dengan teknik pencarian langkah tetap membutuhkan 500010 kali hitungan.

Salah satu cara untuk mempercepat proses pencarian titik optimum tersebut adalah dengan memperbesar langkah pencarian sampai titik optimum terkurung. Pada permasalah maximisasi fungsi tujuan, maka teknik pencarian percepatan langkah dilakukan dengan memperbesar langkah dua kali lipat sepanjang arah gerakan yang menghasilkan bertambahnya nilai fungsi tujuan. Beberapa perbaikan dari teknik ini dapat dikembangkan dari ide yang serupa. Salah satunya adalah dengan mengurangi besar langkah pada saat titik optimum sudah terkurung dalam (x_{i-1}, x_i). Dengan mulai lagi hitungan dari titik x_i atau x_{i-1} prosedur di atas dapat diulangi lagi dengan langkah pencarian diperkecil sampai dicapai pengurungan titik optimum dalam suatu interval yang cukup kecil sesuai dengan kebutuhan. Prosedur pencarian titik optimum dengan teknik ini dijelaskan dalam bagan alir dalam Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Bagan alir "Pencarian Percepatan Langkah"

Contoh 2.2

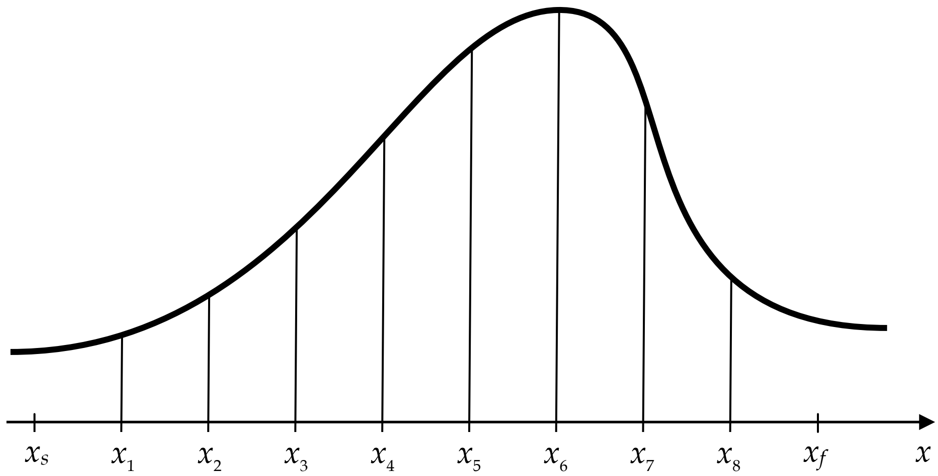
Cari maximum dari fungsi $f = x(1.5-x)$ dengan nilai awal $x_1 = 0.0$ dan langkah awal$s = 0.05$.

Penyelesaian:
Penyelesaiannya dilakukan dengan tabel di bawah. Dari tabel di bawah tampak pada $i = 2$ terjadi pembalikan arah pencarian karena nilai fungsinya menurun. Pada arah yang sebaliknya nilai fungsi bertambah besar, sampai $i = 7$ dengan nilai x optimum adalah $x_7 = 0.8$. Pada soal ini nilai optimum sebetulnya tidak terjadi diantara $i = 7$ dan $i = 8$, tetapi informasi mengenai intervalnya telah didapatkan. Pendekatan yang lebih baik adalah dengan memulai lagi hitungan pada $i = 6$ dengan langkah hitungan yang lebih kecil.

i	s	x_i	f_i	$f_i \le f_{i-1}$
1	–	0.0	0.0	–
2	–0.05	–0.05	–0.0775	ya balik arah
3	0.05	0.05	0.0725	tidak
4	0.10	0.10	0.1400	tidak
5	0.20	0.20	0.2600	tidak
6	0.40	0.40	0.4400	tidak
7	0.80	0.80	0.5600	tidak
8	1.60	1.60	–0.1600	ya

2.1.2 Pencarian lengkap

Teknik ini dapat digunakan jika telah diketahui bahwa interval dimana terdapat titik optimum telah tertentu. Misal x_s dan x_f berurutan menunjukkan titik-titik awal dan akhir dari interval yang menjadi perhatian kita. Teknik Pencarian lengkap terdiri atas pencarian nilai fungsi tujuan pada titik-titik tertentu yang berjarak sama dalam interval (x_s, x_f). Misal suatu fungsi didefinisikan dalam interval (x_s, x_f) dan dievaluasi pada delapan titik-titik hitungan x_1 dan x_8. Andaikan nilai fungsi yang ditinjau berbentuk kurva seperti disajikan dalam Gambar 2.2, maka titik optimum akan terletak diantara titik x_5 dan x_7. Jadi interval (x_5, x_7) dianggap sebagai interval pencarian yang baru.



Gambar 2.2. Teknik Pencarian Bebas Lengkap

Secara umum, jika fungsi tujuan dievaluasi pada n titik berjarak sama didalam interval pencarian mula-mula $L_0 = (x_f - x_s)$, dan jika ternyata bahwa titik optimum berada pada titik x_j, maka interval terakhir adalah

$$L_n = x_{j+1} - x_{j-1} = \frac{2}{n+1} L_0 \qquad (2.1)$$

Contoh 2.3

Cari maximum dari fungsi $f = x(1.5-x)$ dalam interval (0.0, 1.0) dengan $n = 9$.

Penyelesaian:
Penyelesaiannya dilakukan dengan tabel di bawah ini:

i	x_i	f_i
1	0.1	0.14
2	0.2	0.26
3	0.3	0.36
4	0.4	0.44
5	0.5	0.50
6	0.6	0.54
7	0.7	0.56

i	x_i	f_i
8	0.8	0.56
9	0.9	0.54

Dari tabel di atas tampak bahwa $x_7 = x_8$, sehingga titik optimum akan berada pada interval ini. Jika diandaikan bahwa titik optimum terjadi ditengah interval, x_{opt} = 0.75, maka nilai fungsi tujuan optimum adalah 0.5625 yang ternyata memang nilai optimum yang sebenarnya.

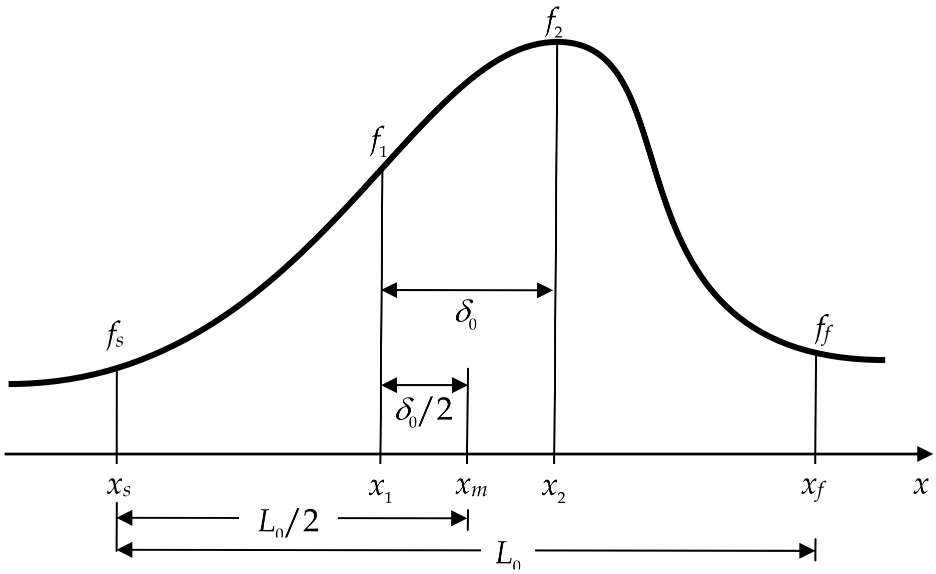
2.1.3 Pencarian Dikotomi

Teknik eliminasi dengan pencarian dikotomi, dan juga pencarian Fibonacci, dan Rasio Emas yang akan dibahas pada bab berikut, pada prinsipnya adalah merupakan teknik pencarian bertahap dimana pencarian yang berikutnya dipengaruhi secara langsung oleh pencarian sebelumnya.

Untuk memperjelas konsep pencarian dikotomi, maka dalam Gambar 2.3 disajikan gambar proses pencarian tersebut. Pada pencarian dikotomi, dua penyelidikan dilakukan pada daerah didekat titik tengah (x_m) dari interval pencarian (x_s, x_f). Berdasarkan nilai relatif dari fungsi tujuan pada dua titik di sebelah kiri (x_1) dan kanan (x_2) yang berjarak $\delta_0/2$ dari titik tengah, maka penentuan interval pencarian berikutnya dilakukan.

Pada Gambar 2.3, tampak bahwa $f_1 < f_2$, maka interval pencarian selanjutnya adalah (x_1, x_f) karena mengurung titik optimum. Demikian seterusnya pencarian dikotomi dilaksanakan sampai didapat titik optimum yang dicari sesuai dengan ketelitian yang dikehendaki. Dalam teknik ini nilai δ_0 adalah bilangan positif kecil.

Dalam Gambar 2.3 tampak bahwa interval pencarian yang baru mempunyai lebar interval sebesar ($L_0/2 + \delta_0/2$). Interval-interval yang baru dicari dengan cara yang sama seperti di atas sehingga didapat hubungan antara lebar interval pencarian dengan jumlah pencarian interval yang telah dilaksanakan yang disajikan di bawah ini.



Gambar 2.3. Pencarian Dikotomi

Tabel 2.1. Lebar Interval pada Pencarian Dikotomi

Jumlah pencarian (i)	Lebar interval (L_i)
0	L_0
2	$\frac{1}{2}(L_0)+\frac{1}{2}\delta_0$
4	$\frac{1}{2}\left(\frac{L_0+\delta_0}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta_0$
6	$\frac{1}{2}\left(\frac{L_0+\delta_0}{4}+\frac{1}{2}\delta_0\right)+\frac{1}{2}\delta_0$
n	$\frac{L_0}{2^{n/2}}+\left(1-\frac{1}{2^{n/2}}\right)\delta_0$

Contoh 2.4

Cari maximum dari fungsi $f = x(1.5–x)$ dalam interval (0.0, 1.0) dengan $n = 6$ dan $\delta_0 = 0.001$.

Penyelesaian:

Dua penyelidikan pertama dilakukan pada titik-titik:

$$x_1 = \frac{1}{2}L_0 + \frac{1}{2}\delta_0 = 0{,}5 - 0{,}0005 = 0{,}4995$$

dan

$$x_2 = \frac{1}{2}L_0 + \frac{1}{2}\delta_0 = 0{,}5 + 0{,}0005 = 0{,}5005$$

dengan nilai fungsi tujuannya masing-masing adalah

$$f_1 = f(x_1) = 0{,}4995(1{,}0005) \approx 0{,}49975$$

$$f_2 = f(x_2) = 0{,}5005(0{,}9995) \approx 0{,}50025$$

Karena $f_1 < f_2$, maka interval pencarian baru adalah (x_1, x_f) = (0.4995, 1.0). Dua pasang titik yang baru adalah

$$x_3 = \left(0{,}4995 + \frac{1{,}0 - 0{,}4995}{2}\right) - 0{,}0005 = 0{,}74925$$

dan

$$x_4 = \left(0{,}4995 + \frac{1{,}0 - 0{,}4995}{2}\right) + 0{,}0005 = 0{,}75025$$

dengan nilai fungsi tujuannya masing-masing adalah

$$f_3 = f(x_3) = 0{,}74925(0{,}75075) \approx 0{,}5624994375$$

$$f_4 = f(x_4) = 0{,}75025(0{,}74975) \approx 0{,}5624999375$$

Karena $f_3 < f_4$, maka interval pencarian baru adalah (x_3, x_f) = (0.74925, 1.0). Dua pasang titik yang baru adalah

$$x_5 = \left(0{,}74925 + \frac{1{,}0 - 0{,}74925}{2}\right) - 0{,}0005 = 0{,}874125$$

dan

$$x_6 = \left(0{,}74925 + \frac{1{,}0 - 0{,}74925}{2}\right) + 0{,}0005 = 0{,}875125$$

dengan nilai fungsi tujuannya masing-masing adalah

$$f_5 = f(x_5) = 0{,}874125(0{,}625875) \approx 0{,}547092984375$$

$$f_6 = f(x_6) = 0{,}875125(0{,}624875) \approx 0{,}5468437344$$

Karena $f_6 < f_5$, maka interval pencarian baru adalah (x_3, x_6) = (0.74925, 0.875125). Sebagai titik optimum diandaikan terjadi pada tengah interval terakhir ini

$$x_{opt} = \frac{0{,}74925 + 0{,}875125}{2} = 0{,}8121875$$

dan

$$f_{opt} \approx 0{,}5586327148$$

2.1.4 Pencarian Fibonacci

Seperti telah disebutkan didepan, Pencarian Fibonacci dapat dipakai untuk mencari maximum dari sebuah fungsi satu variabel, bahkan untuk fungsi yang tidak menerus. Teknik ini, seperti teknik eliminasi yang lainnya mempunyai ciri khas sebagai berikut:

(i) Interval permulaan dimana terletak titik optimum harus diketahui terlebih dahulu.

(ii) Fungsi tujuan yang dioptimasikan harus fungsi unimodal pada interval pencarian.

(iii) Letak yang tepat dari titik optimum tidak dapat ditentukan. Hanya interval pencariannya saja yang dapat diketahui. Interval pencarian dapat diperkecil sesuai dengan ketelitian yang dikehendaki.

(iv) Jumlah nilai fungsi tujuan yang harus dievaluasi dalam pencarian atau jumlah subinterval pencarian harus ditentukan sebelumnya.

Pada teknik Fibonacci ini digunakan sebuah deret yang dinamakan deret Fibonacci (F_n)yang mempunyai ciri sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= F_1 = 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, n = 2,3,4,\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

yang menghasilkan deret: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

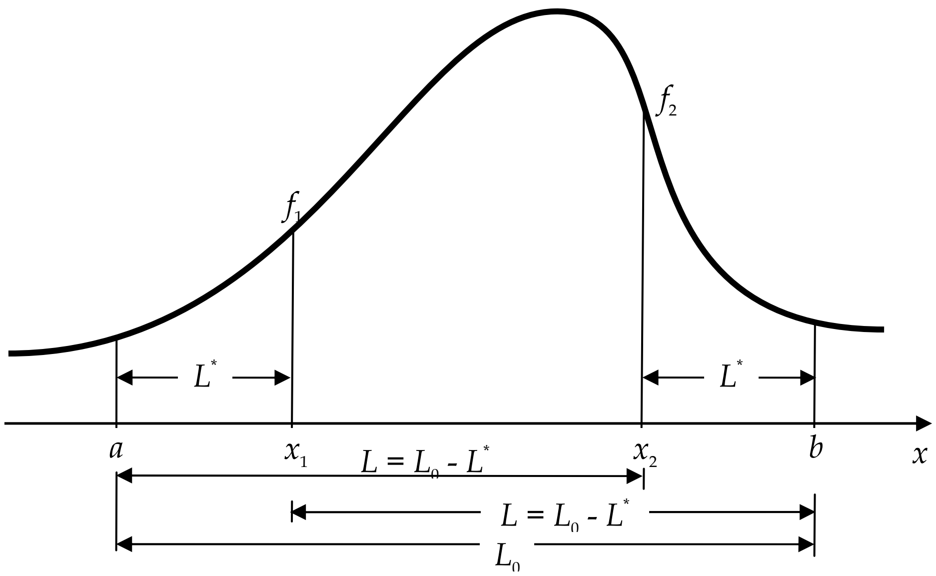
Untuk menjelaskan prosedur teknik Fibonacci, maka disajikan Gambar 2.4. Dimisalkan interval pencarian mula-mula adalah $L_0 = b - a$, sedangkan n adalah jumlah pencarian yang harus dilaksanakan.

Didefinisikan:

$$L^* = \frac{F_{n-2}}{F_n} L_0 \tag{2.3}$$

dan dicari dua titik x_1 dan x_2 yang diletakkan masing-masing pada jarak L^* pada kedua tepi interval. Sehingga

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a + L^* \\ x_2 &= b - L^* = a + \frac{F_{n-1}}{F_n} L_0 \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$



Gambar 2.4. Pencarian Fibonacci

Dengan menggunakan sifat fungsi unimodal, maka dapat ditentukan interval yang mana yang mengandung titik optimum. Pada Gambar 2.4, interval yang mengandung titik optimum menjadi (x_1, b). Besarnya interval ini adalah

$$L = L_0 - L^* = L_0 - \frac{F_{n-2}}{F_n} L_0 = \left(1 - \frac{F_{n-2}}{F_n}\right) L_0 = \frac{F_{n-1}}{F_n} L_0 \qquad (2.5)$$

Langkah selanjutnya adalah mengulangi prosedur di atas dengan nilai n yang baru yang dihitung sebagai $n = n - 1$. Demikian prosedur ini diulang sampai dengan $n = 1$.

Teknik ini kalah populer dengan teknik Rasio Emas yang akan dijelaskan pada bab selanjutnya. Kekalahan itu disebabkan oleh adanya hitungan rasio $\frac{F_{n-2}}{F_n}$ yang baru setiap kali akan menentukan interval pencarian yang baru.

2.1.5 Pencarian Rasio Emas

Teknik eliminasi dengan pencarian memakai Rasio Emas sangat serupa dengan teknik Fibonacci. Dalam teknik ini rasio penyempitan interval mengikuti Rasio Emas. Rasio Emas sendiri merupakan penemuan orang Yunani kuno. Rasio ini dianggap memberikan bentuk bangunan yang paling menyenangkan.

Rasio Emas didefinisikan sebagai:

$$\gamma = \frac{d + b}{d} = \frac{d}{b} \qquad (2.6)$$

dengan b, d berurutan adalah sisi pendek, panjang dari suatu empat persegi panjang. Dari geometri Euclid, diketemukan pula bahwa jika suatu garis dibagi dengan Rasio Emas menjadi dua bagian tidak sama besar, maka nilai perbandingan antara bagian yang besar dibanding panjang keseluruhan sama dengan perbandingan bagian yang kecil dibanding bagian yang besar. Dari Pers.(2.6) diperoleh nilai γ dengan persamaan $\gamma^2 = \gamma + 1$, sehingga nilai $\gamma = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = 1.6180339$. Rasio ini menghasilkan suatu algoritma eliminasi interval yang sangat efisien.

Gambar 2.5 dapat dipakai lagi untuk menjelaskan teknik ini. Pada Gambar 2.5 nilai L^* dicari dengan rumus:

$$L^* = \frac{L_0}{\gamma^2} = \frac{L_0}{(1{,}6180339)^2} \approx 0{,}382 L_0 \qquad (2.7a)$$

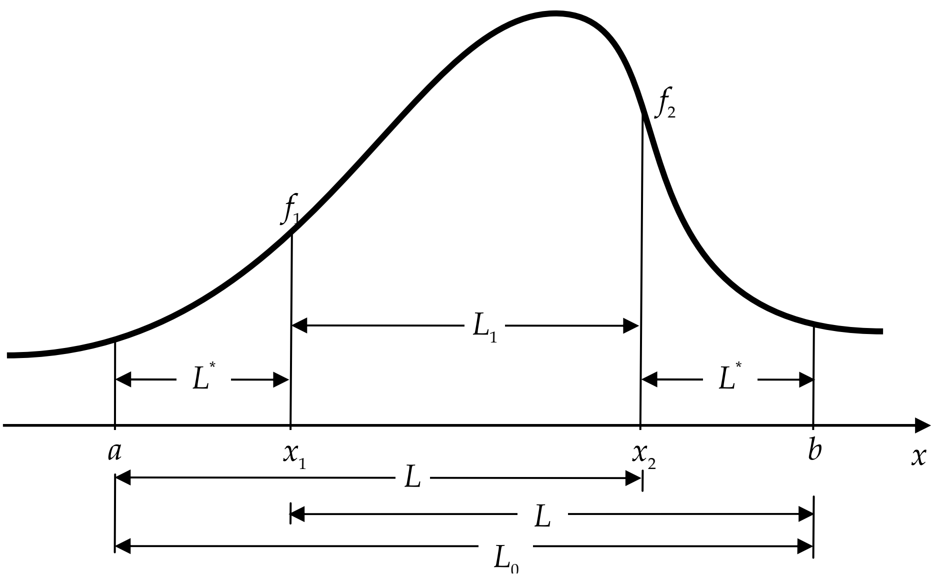
dan

$$L = L_0 - L^* = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) L_0 = \frac{L_0}{\gamma} \approx 0{,}618 L_0 \qquad (2.7b)$$

Dari keistimewaan Rasio Emas, ternyata algoritmanya hanya memerlukan Pers.(2.7) hanya pada iterasi pertama, pada iterasi selanjutnya tidak diperlukan lagi. Hal ini dapat dibuktikan dengan mencermati penggal garis yang terjadi pada Gambar 2.5, pada iterasi kedua. Inilah yang menyebabkan algoritma Rasio Emas yang dihasilkan sangat efisien.

Pada Gambar 2.5, interval (a, b) dibagi menurut geometri Rasio Emas sehingga didapat:

$$L^* = \frac{L_0}{\gamma^2}$$



Gambar 2.5. Pencarian Rasio Emas

Dari ketentuan di atas, maka diperoleh hubungan:

$$\begin{aligned} L = L_0 - L^* &= \left(\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\right) L_0 \\ &= \frac{L_0}{\gamma} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_1 &= L_0 - 2L^* = \left(\frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2}\right) L_0 \\
&= \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma^2}\right) L_0 = \left(\frac{\gamma^2 - \gamma}{\gamma^3}\right) L_0 \\
&= \frac{L_0}{\gamma^3}
\end{aligned}
$$

Nilai L_1 di atas adalah istimewa karena merupakan $\frac{L}{\gamma^2}$. Ini berarti bahwa L_1 otomatis merupakan L^* bagi iterasi selanjutnya. Sehingga untuk iterasi selanjutnya nilai L^* dapat dihitung sebagai jarak antara x_1 dan x_2.

Algoritma Rasio Emas untuk permasalahan maximisasi $f(x)$:

Langkah 1: Misalkan $a^{(1)}$ dan $b^{(1)}$ adalah titik tepi interval pencarian mula-mula. Hitung

$$x_1^{(1)} = a^{(1)} + \frac{b^{(1)} - a^{(1)}}{(1{,}6180339)^2}$$

$$x_2^{(1)} = b^{(1)} + \left(x_1^{(1)} - a^{(1)}\right)$$

Set k = 2.

Langkah 2: (1) Jika $f(x_1^{(k-1)}) > f(x_2^{(k-1)})$, maka

$$a^{(k)} = a^{(k\text{-}1)} \text{ dan } b^{(k)} = x_2^{(k-1)}$$

$$x_1^{(k)} = a^{(k)} + \left(x_2^{(k-1)} - x_1^{(k-1)}\right) \text{ dan } x_2^{(k)} = x_1^{(k-1)}$$

(2) Jika $f(x_1^{(k-1)}) < f(x_2^{(k-1)})$, maka

$$a^{(k)} = x_1^{(k-1)} \text{ dan } b^{(k)} = b^{(k\text{-}1)}$$

$$x_1^{(k)} = x_2^{(k-1)} \text{ dan } x_2^{(k)} = b^{(k)} + \left(x_2^{(k-1)} - x_1^{(k-1)}\right)$$

Langkah 3: (1) Berhenti jika $(b^{(k)}\text{-}a^{(k)}) < \varepsilon$ cukup kecil sesuai dengan ketelitian yang dikehendaki, titik optimum x^* diambil sama dengan titik-titik $a^{(k)}$, $b^{(k)}$, $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, yang memberikan nilai f maximum.

(2) Jika $(b^{(k)}\text{-}a^{(k)}) \geq \varepsilon$, set $k = k + 1$ dan lakukan langkah 2.

Contoh 2.5

Cari maximum dari fungsi f = 720 – 12/x – 108x dalam interval (0.0, 1.0) dengan ε = 0.01.

Penyelesaian:

Iterasi I:

Langkah 1: Hitung

$$x_1^{(1)} = 0 + \frac{1-0}{1{,}6180339^2} = 0{,}382$$

$$x_2^{(1)} = 1 - (0{,}382 - 0) = 0{,}618$$

Set k = 2.

Langkah 2: $$f(x_1^{(1)}) = f(0{,}382) = 720 - \frac{120}{0{,}382} - 108(0{,}382) = 647{,}33$$

$$f(x_2^{(1)}) = f(0{,}618) = 720 - \frac{120}{0{,}618} - 108(0{,}618) = 633{,}84$$

Karena $f(x_1^{(1)}) > f(x_2^{(1)})$, maka

$a^{(2)}$ = 0 dan $b^{(2)}$ = 0,618

$x_1^{(2)}$ = 0 + (0,618 – 0,382) = 0,236 dan $x_2^{(2)}$ = 0,386

Langkah 3: $b^{(2)} - a^{(2)}$ = 0,618 – 0 > ε = 0.01, maka k = 3, kembali ke Langkah 2.

Algoritma ini dilanjutkan terus dan hasilnya disajikan dalam tabel di bawah sampai interval terakhir lebih kecil dari 0.01.

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$b^{(k)}-a^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f(x_1^{(k)})$	$f(x_2^{(k)})$
1	0	1	1	0.381966	0.618034	647.3313	633.8359
2	0	0.618034	0.618034	0.236068	0.381966	643.6718	647.3313
3	0.236068	0.618034	0.381966	0.381966	0.472136	647.3313	643.5929
4	0.236068	0.472136	0.236068	0.326238	0.381966	647.9833	647.3313
5	0.236068	0.381966	0.145898	0.291796	0.326238	647.3614	647.9833
6	0.291796	0.381966	0.090170	0.326238	0.347524	647.9833	647.9374

k	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$b^{(k)}-a^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$f(x_1^{(k)})$	$f(x_2^{(k)})$
7	0.291796	0.347524	0.055728	0.313082	0.326238	647.8585	647.9833
8	0.313082	0.347524	0.034442	0.326238	0.334368	647.9833	647.9997
9	0.326238	0.347524	0.021286	0.334368	0.339394	647.9997	647.9883
10	0.326238	0.339394	0.013156	0.331264	0.334368	647.9986	647.9997
11	0.331264	0.339394	0.008130	0.334368	0.336290	647.9997	647.9972

Pada iterasi ke 11, nilai maximum fungsi tujuan didapat pada $x_1^{(11)} = 0{,}334368$ dan $f(x_1^{(11)}) = 647{,}9997$, sebagai perbandingan nilai fungsi maximum yang betul adalah 648. Dalam algoritma ini perlu diperhatikan bahwa error karena pembulatan mungkin terjadi, sehingga setiap beberapa iterasi langkah 1 perlu dilakukan.

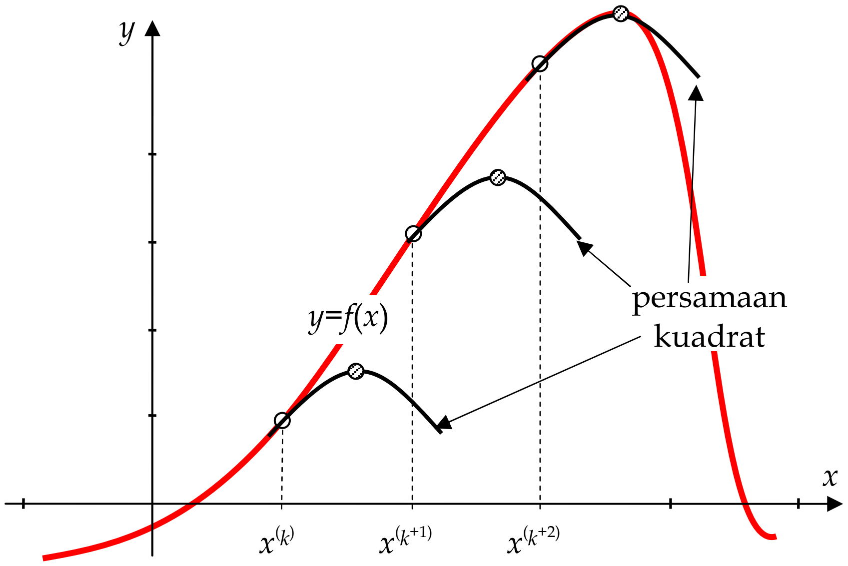
2.2 Teknik Pendekatan

2.2.1 Metode Newton (Kuadratik)

Metode Newton (atau seringkali disebut dengan metode Newton–Raphson) memerlukan fungsi tujuan tanpa kendala dalam interval yang menjadi perhatian dan mempunyai derivasi pertama maupun keduanya. Metode ini banyak pula dikembangkan untuk memecahkan permasalahan optimasi multi variabel. Metode Newton seringkali dipandang sebagai metode untuk mencari akar dari suatu fungsi. Dalam bab ini, metode ini akan diinterpretasikan sebagai pendekatan kuadratik dari suatu fungsi tujuan f. Ditinjau tiga suku pertama dari suatu deret Taylor dari fungsi f pada titik $x^{(k)}$ pada iterasi k.

$$F(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2} f''(x^{(k)})(x - x^{(k)})^2 \qquad (2.8)$$

Fungsi $F(x)$ adalah pendekatan kuadratik dari $f(x)$ dan mempunyai derivasi pertama dan kedua yang sama di titik $x^{(k)}$. Kita dapat maximisasi $F(x)$ secara langsung. Jika titik $x^{(k)}$ berada di sekitar titik optimum dari $f(x)$, kurva $F(x)$ akan merupakan pendekatan dari fungsi $f(x)$ pada titik optimum. Jadi maximisasi fungsi pendekatan $F(x)$, merupakan pendekatan dari maximisasi fungsi tujuan asli $F(x)$ (lihat Gambar 2.6).



Gambar 2.6. Metode Newton

Syarat perlu untuk mencari titik optimum dari Pers.(2.8) adalah

$$F'(x) = f'(x^{(k)}) + f''(x^{(k)})(x^* - x^{(k)}) = 0$$

atau $$x^* = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{f''(x^{(k)})} \tag{2.9}$$

Pada setiap iterasi k, titik optimum x^* dari pendekatan kuadratik menjadi titik yang akan digunakan untuk membuat fungsi pendekatan kuadratik yang selanjutnya. Jadi nilai $x^{(k+1)}$ dibuat sama dengan x^* dalam Pers.(2.9) untuk mendapatkan rumus iterasi Newton sebagai berikut:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f'(x^{(k)})}{f''(x^{(k)})} \tag{2.10}$$

Prosedur iterasi Newton dihentikan jika perubahan dari titik optimum telah mencapai ketelitian yang diharapkan atau $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| < \varepsilon$.

Contoh 2.6

Cari maximum dari fungsi $f = 720 - 12/x - 108x$ mulai dengan $x = 0.25$ dan $\varepsilon = 0.01$.

Penyelesaian:

Derivasi pertama dan kedua dari fungsi tujuan di atas adalah sebagai berikut:

$$f'(x) = \frac{12}{x^2} - 108 \text{ dan } f''(x) = \frac{-24}{x^3}$$

Pada $x^{(1)} = 0{,}25$, $f'(x^{(1)}) = 84$, dan $f''(x^{(1)}) = -1536$.

Sehingga $F(x) = 576 + 468x - 768x^2$

dan $x^{(2)} = x^{(1)} - \dfrac{f'(x^{(1)})}{f''(x^{(1)})} = 0{,}25 - \dfrac{84}{-1536} = 0{,}305$.

Hasil selengkapnya disajikan dalam tabel di bawah ini.

k	$x^{(k)}$	$f'(x^{(k)})$	$f''(x^{(k)})$	$x^{(k+1)}$	$f(x^{(k+1)})$
1	0.25	84.00	–1536.00	0.305	647.720
2	0.305	21.00	–0845.89	0.330	647.996
3	0.330	02.19	–0667.84	0.333	648.000

Didalam daerah optimum, tampak dari tabel di atas bahwa metode Newton konvergen dengan cepat sekali. Tetapi sayangnya metode ini tidak selalu konvergen. Dengan menggunakan beberapa iterasi dari teknik eliminasi, seperti pencarian Rasio Emas, sebelum melakukan metode Newton, biasanya masalah ketidak-konvergenan dari metode Newton dapat dihindari. Kelemahan lain dari metode ini adalah diperlukannya derivasi pertama dan kedua yang secara numeris sangat mahal biayanya. Biasanya metode Newton ini dipakai kombinasi dengan metode lain untuk mengurangi kelemahannya.

3. PERANGKAT LUNAK OPTIMASI SATU DIMENSI

Dalam bab ini akan disajikan perangkat lunak dalam bahasa FORTRAN yang dapat dipakai untuk keperluan mendapatkan nilai minimum dari suatu fungsi satu variabel. Perangkat lunak ini diambil dari "Numerical Recipes The Art of Scientific Computing" karangan William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky. Perangkat lunak ini terdiri dari empat buah subprogram disertai dengan sebuah program utama untuk merangkumnya ditambah sebuah subprogram yang memuat definisi fungsinya serta sebuah lagi untuk mendefinisikan derivasi pertamanya. Perangkat lunak tersebut terdiri dari:

a. Subprogram MNBRAK

b. Subprogram GOLDEN

c. Subprogram BRENT

d. Subprogram DBRENT

e. Program MINIMISASI

f. Subprogram F

g. Subprogram DF

Setiap subprogram di atas akan dijelaskan secara lebih rinci pada bab berikutnya. Bagi yang terbiasa dengan bahasa FORTRAN kejelasan dapat pula diperoleh dengan membaca dan mencermati langsung 'coding' dari masing-masing 'program listing.'

3.1 Subprogram: MNBRAK

MNBRAK adalah subprogram yang membantu untuk mengurung nilai minimum suatu fungsi tujuan. Hal ini diperlukan karena pada Bab II telah dijelaskan bahwa seluruh metode yang telah dijelaskan mengadaikan fungsi tujuan yang unimodal. Jadi pada prinsipnya MNBRAK adalah mencari interval dimana suatu fungsi bersifat unimodal. Interval tersebut dicari dengan menyusuri fungsi tujuan kearah lembahnya untuk kemudian berhenti pada saat lembahnya terkurung.

Data masukan dan keluaran dari MNBRAK dapat dilihat langsung pada listing di bawah ini.

```
C0***6****1*********2*********3*********4*********5*********6*********77
 SUBROUTINE MNBRAK (AX, BX, CX, FA, FB, FC, FUNC, ITMAX, OK)
C-----------------------------------------------------------------------
C
C Given a function FUNC, and given distinct initial points AX and BX,
C this routine searches in the downhill direction (defined by the
C function as evaluated at the initial points) and returns new points
C AX, BX, CX which bracket a minimum of the function. Also returned
C are the function values at the three points, FA, FB, and FC
C
C-----------------------------------------------------------------------

 PARAMETER (GOLD=1.618034, GLIMIT=100.0, TINY=1.E-20)

C The first parameter is the default ratio by which successive
C interval are magnified; the second is the maximum magnification
C allowed for a parabolic-fit step.

 LOGICAL OK

 FA = FUNC(AX)
 FB = FUNC(BX)

 IF (FB.GT.FA) THEN
C Switch the roles of A and B so that we can go downhill
C in the direction from A to B
 TEMP = AX
 AX = BX
 BX = TEMP
 TEMP = FB
 FB = FA
 FA = TEMP
 ENDIF

C First guess for C
 CX = BX + GOLD*(BX-AX)
 FC = FUNC(CX)

C Reset the counter
 ITER = 1

C Looping: keep returning here until we bracket
100 IF (FB.GE.FC) THEN

C Compute U by parabolic extrapolation from A, B, C.
C TINY is used to prevent any possible divion by zero

 R = (BX-AX)*(FB-FC)
 Q = (BX-CX)*(FB-FA)
 U = BX-((BX-CX)*Q-(BX-AX)*R)/(2.*SIGN(MAX(ABS(Q-R),TINY),Q-R))

C We won't go farther than this.
 ULIM = BX+GLIMIT*(CX-BX)

C Now to test various possibilities
 IF ( (BX-U)*(U-CX).GT.0. ) THEN

C Parabolic U is between B and C: try it
 FU = FUNC(U)

C Got a minimum between A and U
 IF (FU.LT.FC) THEN

C Got a minimum between B and C
 AX = BX
 FA = FB
 BX = U
```

```
 FB = FU
C ... and exit
 GOTO 100

 ELSE IF (FU.GT.FB) THEN

C Got a minimum between A and U
 CX = U
 FC = FU
C ... and exit
 GOTO 100

 ENDIF

C Parabolic fit was no use. Use default magnification
 U = CX+GOLD*(CX-BX)
 FU = FUNC(U)

 ELSE IF ( (CX-U)*(U-ULIM).GT.0.) THEN

C Parabolic fit is between C and its allowed limit
 FU = FUNC(U)
 IF (FU.LT.FC) THEN
 BX = CX
 CX = U
 U = CX+GOLD*(CX-BX)
 FB = FC
 FC = FU
 FU = FUNC(U)
 ENDIF

 ELSE IF ( (U-ULIM)*(ULIM-CX).GE.0.) THEN

C Limit parabolic U to maximum allowed value
 U = ULIM
 FU = FUNC(U)

 ELSE

C Reject parabolic U, use default magnification
 U = CX+GOLD*(CX-BX)
 FU = FUNC(U)

 ENDIF

C Eliminate oldest point and continue
 AX = BX
 BX = CX
 CX = U
 FA = FB
 FB = FC
 FC = FU

C Count the next work
 ITER = ITER + 1
 OK = ITER .LE. ITMAX

C ... and do the work if OK
 IF (OK) GOTO 100

 ENDIF

 RETURN
 END
```

3.2 Subprogram: GOLDEN

GOLDEN adalah subprogram yang menggunakan teknik pencarian Rasio Emas untuk mencari nilai minimum fungsi tujuan. Perangkat lunak ini paling sederhana dibanding dengan perangkat lunak yang lain. Oleh karena itu peserta penataran diharapkan mencermati listing di bawah ini agar mendapatkan ide bagaimana suatu algoritma numeris diubah menjadi bahasa FORTRAN.

```
C0***6****1*********2*********3*********4*********5*********6*********77
 FUNCTION GOLDEN (AX, BX, CX, F, TOL, XMIN, ITMAX, OK)
C-----------------------------------------------------------------------
C
C Given a function F, and given a bracketing triplet of abscissas
C AX, BX, CX (such that BX is between AX and CX, and F(BX) is less
C than both F(AX) and F(CX)). This routine performs a golden section
C search for the minimum, isolating it to afractional precision
C about TOL. The abscissa of the minimum is returned as XMIN, and
C the minimum function value is returned as GOLDEN, the returned
C function value.
C
C-----------------------------------------------------------------------

 PARAMETER (R=0.61803399, C=1.0-R)
 LOGICAL OK

C At any given time we will keep track of four points: X0,X1,X2,X3.
 X0 = AX
 X3 = CX

C Make X0 to X1 the smaller segment
 IF (ABS(CX-BX).GT.ABS(BX-AX)) THEN
 X1 = BX
C ... and fill in the new point to be tried
 X2 = BX+C*(CX-BX)
 ELSE
 X2 = BX
 X1 = BX-C*(BX-AX)
 ENDIF

C The initial function evaluations. Note that we never need
C to evaluate the function at the original endpoints.
 F1 = F(X1)
 F2 = F(X2)

C Reset the counter
 ITER = 1

C Looping: keep returning here.
100 IF (ABS(X3-X0).GT.TOL*(ABS(X1)+ABS(X2))) THEN

C One possible outcome, its housekeeping
 IF (F2.LT.F1) THEN
 X0 = X1
 X1 = X2
 X2 = R*X1+C*X3
 F0 = F1
 F1 = F2
 F2 = F(X2)
 ELSE
 X3 = X2
 X2 = X1
 X1 = R*X2+C*X0
```

```
 F3 = F2
 F2 = F1
 F1 = F(X1)
 ENDIF

C Count the next work
 ITER = ITER + 1
 OK = ITER .LE. ITMAX

C ... and do the work if OK
 IF (OK) GOTO 100

 ENDIF

C We are done. Output the best of the two current values
 IF (F1.LT.F2) THEN
 GOLDEN = F1
 XMIN = X1
 ELSE
 GOLDEN = F2
 XMIN = X2
 ENDIF

 RETURN
 END
```

3.3 Subprogram: BRENT

BRENT adalah subprogram yang menggunakan kombinasi metode Pencarian Rasio Emas dan Interpolasi Kuadratik. Brent sangat terkenal dalam membuat perangkat lunak untuk mencari akar dari suatu persamaan satu variabel. Perangkat lunaknya sangat efisien dan hampir selalu berhasil mendapatkan akar tersebut. Keberhasilannya tersebut diaplikasikan kepada pencarian titik minimum dari suatu fungsi tujuan.

Perangkat lunak ini menggunakan teknik pencarian Rasio Emas dengan pertimbangan bahwa teknik ini akan selalu mendapatkan nilai minimum dari fungsi tujuan, tetapi membutuhkan waktu yang lama. Teknik interpolasi kuadratik dipergunakan disini dengan pertimbangan akan kecepatannya mendapatkan titik minimum. Kecepatan ini didapat karena di daerah sekitar titik optimum, lengkung fungsinya pada umumnya mendekati kurva parabolis.

Walaupun pada dasarnya teknik yang dipakai cukup sederhana, tetapi dalam kenyataannya subroutine-nya tidak mudah diikuti karena adanya langkah-langkah tambahan untuk menghindari setiap kesulitan numeris yang mungkin terjadi dalam pencarian nilai minimum tersebut. Listing program disajikan di bawah ini.

```
C0***6****1*********2*********3*********4*********5*********6*********77
 FUNCTION BRENT (AX, BX, CX, F, TOL, XMIN, ITMAX, OK)
C-----------------------------------------------------------------------
C
```

```
C Given a function F, and given a bracketing triplet of abscissas
C AX, BX, CX (such that BX is between AX and CX, and F(BX) is less
C than both F(AX) and F(CX)). This routine isolates the minimum, to
C a fractional precision about TOL using Brent's method.
C The abscissa of the minimum is returned as XMIN, and
C the minimum function value is returned as BRENT, the returned
C function value.
C
C-----------------------------------------------------------------------

C Golden ratio; and a small number which protects against trying
C fractional accuracy for a minimum that happens to be exactly zero.
 PARAMETER (CGOLD=0.381966, ZEPS=1.0E-10)

 LOGICAL OK

C A and B must be in ascending order, though the input abscissa
C need not be
 A = MIN(AX,CX)
 B = MAX(AX,CX)

C ... initialization ...
 V = BX
 W = V
 X = V

C This will be distance moced on the step before last.
 E = 0.0
 FX = F(X)
 FV = FX
 FW = FX

C Main loop
 DO ITER = 1, ITMAX

 XM = 0.5*(A+B)
 TOL1 = TOL*ABS(X)+ZEPS
 TOL2 = 2.0*TOL1

C Test for done here
 IF (ABS(X-XM).LE.(TOL2-0.5*(B-A))) GOTO 300

C Construct a trial parabolic fit
 IF (ABS(E).GT.TOL1) THEN
 R = (X-W)*(FX-FV)
 Q = (X-V)*(FX-FW)
 P = (X-V)*Q-(X-W)*R
 Q = 2.0*(Q-R)
 IF (Q.GT.0.0) P = -P
 Q = ABS(Q)
 ETEMP = E
 E = D
 IF ( ABS(P).GE.ABS(0.5*Q*ETEMP) .OR. P.LE.Q*(A-X) .OR.
 1 P.GE.Q*(B-X) ) GOTO 100
C The above conditions determine the acceptability of the
C parabolic fit.
C Here it is o.k. Take the parabolic step
 D = P/Q
 U = X+D
 IF (U-A.LT.TOL2 .OR. B-U.LT.TOL2) D = SIGN(TOL1,XM-X)

C Skip over the golden section step
 GOTO 200
 ENDIF

C We arrive here for a golden section step, which we take
C into the larger of the two segments
100 IF (X.GE.XM) THEN
 E = A-X
 ELSE
```

```
 E = B-X
 ENDIF

C Take the golden section step
 D = CGOLD*E

C Arrive here with D computed either from parabolic fit,
C or else from the golden section step
200 IF (ABS(D).GE.TOL1) THEN
 U = X+D
 ELSE
 U = X+SIGN(TOL1,D)
 ENDIF

C This is the one function evaluation per iteration.
 FU = F(U)

C ... and now we have to decide what to do with our
C function evaluation. Housekeeping follows
 IF (FU.LE.FX) THEN

 IF (U.GE.X) THEN
 A = X
 ELSE
 B = X
 ENDIF
 V = W
 FV = FW
 W = X
 FW = FX
 X = U
 FX = FU

 ELSE

 IF (U.LT.X) THEN
 A = U
 ELSE
 B = U
 ENDIF
 IF (FU.LE.FW .OR. W.EQ.X) THEN
 V = W
 FV = FW
 W = U
 FW = FU
 ELSE IF (FU.LE.FV .OR. V.EQ.X .OR. V.EQ.W) THEN
 V = U
 FV = FU
 ENDIF
C Done with housekeeping. Back for another iteration.

 ENDIF
 ENDDO
 OK = .FALSE.
 GOTO 400

C Arrive here ready to exit with best values
300 OK = .TRUE.
400 XMIN = X
 BRENT = FX

 RETURN
 END
```

3.4 Subprogram: DBRENT

DBRENT merupakan modifikasi dari BRENT dengan menambahkan informasi derivasi pertama untuk mencari nilai minimum fungsi tujuan.

```
C0***6****1*********2*********3*********4*********5*********6*********77
 FUNCTION DBRENT (AX, BX, CX, F, DF, TOL, XMIN, ITMAX, OK)
C-----------------------------------------------------------------------
C
C Given a function F, and given a bracketing triplet of abscissas
C AX, BX, CX (such that BX is between AX and CX, and F(BX) is less
C than both F(AX) and F(CX)). This routine isolates the minimum, to
C a fractional precision about TOL using a modification of Brent's
C method that uses derivatives.
C The abscissa of the minimum is returned as XMIN, and
C the minimum function value is returned as DBRENT, the returned
C function value.
C
C-----------------------------------------------------------------------

C A small number which protects against trying fractional accuracy
C for a minimum that happens to be exactly zero.
 PARAMETER (ZEPS=1.0E-10)

 LOGICAL OK1, OK2, OK

C A and B must be in ascending order, though the input abscissa
C need not be
 A = MIN(AX,CX)
 B = MAX(AX,CX)

C ... initialization ...
 V = BX
 W = V
 X = V

C This will be distance moved on the step before last.
 E = 0.0
 FX = F(X)
 FV = FX
 FW = FX

C All our housekeeping chores are doubled by the necessity of
C moving derivative values as well as function values
 DX = DF(X)
 DV = DX
 DW = DX

C Main loop
 DO ITER = 1, ITMAX

 XM = 0.5*(A+B)
 TOL1 = TOL*ABS(X)+ZEPS
 TOL2 = 2.0*TOL1

C Test for done here
 IF (ABS(X-XM).LE.(TOL2-0.5*(B-A))) GOTO 300

 IF (ABS(E).GT.TOL1) THEN

C Initialize these D's to an out-of-bracket value
 D1 = 2.0*(B-A)
 D2 = D1

C Secant method
```

```
 IF (DW.NE.DX) D1 = (W-X)*DX/(DX-DW)

C Secant method with the other stored point
 IF (DV.NE.DX) D2 = (V-X)*DX/(DX-DV)

C Which of these two estimates of D shall we take?
C We will insist that they be within the bracket,
C and on the side pointed to by the derivative at X:
 U1 = X+D1
 U2 = X+D2
 OK1 = ((A-U1)*(U1-B).GT.0.0) .AND. (DX*D1.LE.0.0)
 OK2 = ((A-U2)*(U2-B).GT.0.0) .AND. (DX*D2.LE.0.0)

C Movement on the step before last
 OLDE = E
 E = D

C Take only an acceptable D, and if both are acceptable,
C take the smallest one.
 IF (.NOT.(OK1.AND.OK2)) THEN
 GOTO 100
 ELSE IF (OK1.AND.OK2) THEN
 IF (ABS(D1).LT.ABS(D2)) THEN
 D = D1
 ELSE
 D = D2
 ENDIF
 ELSE IF (OK1) THEN
 D = D1
 ELSE
 D = D2
 ENDIF

 IF (ABS(D).GT.ABS(0.5*OLDE)) GOTO 100

 U = X+D
 IF (U-A.LT.TOL2 .OR. B-U.LT.TOL2) D = SIGN(TOL1, XM-X)
 GOTO 200

 ENDIF

C Decide which segment by the sign of the derivative
100 IF (DX.GE.0.) THEN
 E = A-X
 ELSE
 E = B-X
 ENDIF

C Take bisect, NOT the golden section step
 D = 0.5*E

C Arrive here with D computed either from parabolic fit,
C or else from the golden section step
200 IF (ABS(D).GE.TOL1) THEN
 U = X+D
 FU = F(U)
 ELSE
 U = X+SIGN(TOL1,D)
 FU = F(U)

C If the minimum step in the downhill direction
C takes us uphill, then we are done
 IF (FU.GT.FX) GOTO 300
 ENDIF

C Now all the housekeeping, sigh.
 DU = DF(U)
 IF (FU.LE.FX) THEN

 IF (U.GE.X) THEN
```

```
 A = X
 ELSE
 B = X
 ENDIF
 V = W
 FV = FW
 DV = DW
 W = X
 FW = FX
 DW = DX
 X = U
 FX = FU
 DX = DU

 ELSE

 IF (U.LT.X) THEN
 A = U
 ELSE
 B = U
 ENDIF
 IF (FU.LE.FW .OR. W.EQ.X) THEN
 V = W
 FV = FW
 DV = DW
 W = U
 FW = FU
 DW = DU
 ELSE IF (FU.LE.FV .OR. V.EQ.X .OR. V.EQ.W) THEN
 V = U
 FV = FU
 DV = DU
 ENDIF
C Done with housekeeping. Back for another iteration.

 ENDIF
 ENDDO
 OK = .FALSE.
 GOTO 400

C Arrive here ready to exit with best values
300 OK = .TRUE.
400 XMIN = X
 DBRENT = FX

 RETURN
 END
```

3.5 Program Utama

Dalam program utama ketiga subprogram pertama dikombinasikan untuk menyelesaikan beberapa fungsi tujuan. Program utama sangat pendek dan mudah diikuti sehingga peserta penataran diharapkan dapat mengubahnya sesuai dengan kebutuhan, Subprogran DBRENT tidak dikombinasikan dalam program utama untuk memberi kesempatan pada para peserta penataran mengkombinasikan sendiri.

```
C0***6****1*********2*********3*********4*********5*********6*********77
C
C Program untuk menghitung minimum dari suatu fungsi satu variabel.
C Kecuali MAIN program serta F & DF, semua subprogram diambil dari
```

```
C "NUMERICAL RECIPES The Art of Scientific Computing"
C oleh
C William H. Press
C Brian P. Flannery
C Saul A. Teukolsky
C William T. Vetterling
C
C0***6****1*********2*********3*********4*********5*********6*********77

 PROGRAM Minimisasi

C0---6----1---------2---------3---------4---------5---------6---------77

 EXTERNAL F, DF
 LOGICAL OK
 COMMON /PILIHAN/IPILIH

C --------------------------------------------------------------
C TENTUKAN ITERASI MAXIMUM YANG AKAN DIPAKAI DALAM PROGRAM INI
C --------------------------------------------------------------
 WRITE (*,'(A,$)') ' Iterasi maximum yang dipakai : '
 READ (*,*) ITMAX
 ITMAX = ABS(ITMAX)

C ----
C MENU
C ----
150 WRITE (*,*)
 WRITE (*,*) '*************************************'
 WRITE (*,*) '* Pilih salah satu fungsi: *'
 WRITE (*,*) '* *'
 WRITE (*,*) '* 1. f(x) = -x(1.5-x) *'
 WRITE (*,*) '* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *'
 WRITE (*,*) '* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *'
 WRITE (*,*) '* 4. f(x) = e^x - x *'
 WRITE (*,*) '* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *'
 WRITE (*,*) '* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *'
 WRITE (*,*) '* *'
 WRITE (*,*) '*************************************'

C ----------------------------------------------
C CATAT FUNGSI YANG DIPILIH OLEH PEMAKAI PROGRAM
C ----------------------------------------------
200 WRITE (*,'(A,$)') ' Pilihan anda : '
 READ (*,*) IPILIH
 IF (IPILIH.LT.1 .OR. IPILIH.GT.6) THEN
 WRITE (*,*)
 WRITE (*,*) 'Pilihan anda harus di antara 1 s/d 6'
 GOTO 200
 ENDIF

C ---------------------------------------
C JIKA PEMAKAI BOSAN ... QUIT THE PROGRAM
C ---------------------------------------
 IF (IPILIH.EQ.6) GOTO 900

C -------------------------------
C CATAT KETELITIAN YANG DIGUNAKAN
C -------------------------------
 WRITE (*,'(A,$)') ' Ketelitian : '
 READ (*,*) TOL

C Jika pemakai memasukkan nilai negatif, ubah menjadi positif.
 TOL = ABS(TOL)

C -----------------------------------------------------
C BACA TITIK YANG BERADA PADA SEBUAH LERENG SUATU FUNGSI
C -----------------------------------------------------
 WRITE (*,'(A,$)') ' X titik lereng: '
 READ (*,*) AX
```

namafile: D:\My Documents\Publikasi\Optimasi\Non-linier\Nonlinier 2003.doc (676 Kb)

```
C ------------------------------------------------------------
C PERKIRAKAN LAGI SEBUAH TITIK YANG BERADA PADA LERENG YANG SAMA
C ------------------------------------------------------------
 BX = AX + 10.0*TOL

C ------------------------
C PENGURUNGAN TITIK MINIMUM
C ------------------------
 CALL MNBRAK (AX, BX, CX, FA, FB, FC, F, ITMAX, OK)
 IF (.NOT.OK) WRITE (*,*) '*** MNBRAK melebihi iterasi maximum'
 WRITE (*,*)
 WRITE (*,*) 'Interval minimum: [',AX,'] [',BX,'] [',CX,']'
 WRITE (*,*) 'Nilai fungsinya : [',FA,'] [',FB,'] [',FC,']'
 WRITE (*,*)

C ----------------------
C SIMPAN INTERVAL MINIMUM
C ----------------------
 A = AX
 B = BX
 C = CX

C -----------------
C JUDUL DARI JAWABAN
C -----------------
 WRITE (*,*) '--------------------------------------'
 WRITE (*,*) 'Metode Xmin F(Xmin)'
 WRITE (*,*) '--------------------------------------'

C ------------------------
C HITUNGAN DENGAN RASIO EMAS
C ------------------------
 FMIN = GOLDEN (A, B, C, F, TOL, XMIN, ITMAX, OK)
 WRITE (*,*) 'Rasio Emas ', XMIN, FMIN
 IF (.NOT.OK) WRITE (*,*) '*** MNBRAK melebihi iterasi maximum'

C ---------------------------------------------------
C GUNAKAN INTERVAL YANG SAMA UNTUK HITUNGAN SELANJUTNYA
C ---------------------------------------------------
 A = AX
 B = BX
 C = CX

C ------------------------
C HITUNGAN DENGAN CARA BRENT
C ------------------------
 FMIN = BRENT (A, B, C, F, TOL, XMIN, ITMAX, OK)
 WRITE (*,*) 'Brent ', XMIN, FMIN
 IF (.NOT.OK) WRITE (*,*) '*** BRENT melebihi iterasi maximum'

C ---------------------------------------------------
C GUNAKAN INTERVAL YANG SAMA UNTUK HITUNGAN SELANJUTNYA
C ---------------------------------------------------
 A = AX
 B = BX
 C = CX

C ------------------------------------------
C HITUNGAN DENGAN CARA BRENT DENGAN DERIVATIF
C ------------------------------------------
 FMIN = DBRENT (A, B, C, F, DF, TOL, XMIN, ITMAX, OK)
 WRITE (*,*) 'Brent plus', XMIN, FMIN
 IF (.NOT.OK) WRITE (*,*) '*** DBRENT melebihi iterasi maximum'

C -------------------
C PENUTUP DARI JAWABAN
C -------------------
 WRITE (*,*) '--------------------------------------'
```

namafile: D:\My Documents\Publikasi\Optimasi\Non-linier\Nonlinier 2003.doc (676 Kb)

```
C --------------------------------
C PAUSE, AGAR HASIL DAPAT DINIKMATI
C --------------------------------
 PAUSE '... tekan kunci: RETURN'
 GOTO 150

900 STOP 'The job was well done sir ! Good luck !'
 END
```

3.6 Subprogram F

Didalam subprogram F ini didefinisikan contoh-contoh fungsi tujuan. Didalam subprogram ini variabel IPILIH didefinisikan didalam program utama.

```
C0***6****1*********2*********3*********4*********5*********6*********77
 FUNCTION F (X)
C----------------------------------------------------------------------
C
C Definisi fungsi dengan pilihannya ditentukan dari program utama
C
C----------------------------------------------------------------------

C ---------------------------------
C GUNAKAN PILIHAN DALAM MAIN PROGRAM
C ---------------------------------
 COMMON /PILIHAN/IPILIH

C ---------------------------
C GUNAKAN FUNGSI YANG TERPILIH
C ---------------------------
 GOTO (1,2,3,4,5) IPILIH

1 F = -X*(1.5-X)
 RETURN

2 F = X**5 -5.0*X**3 - 20.0*X + 5.0
 RETURN

3 F = -720.0 + 12.0/X + 108.0*X
 RETURN

4 F = EXP(X) - X
 RETURN

5 F = -4.0*X**3 + 7.0*X**2 + 4.0*X - 6.0
 RETURN

 END
```

3.7 Subprogram DF

Didalam subprogram DF ini didefinisikan derivasi dari fungsi tujuan yang didefinisikan di subprogram F. Didalam subprogram ini variabel IPILIH didefinisikan didalam program utama.

```
C0***6****1*********2*********3*********4*********5*********6*********77
 FUNCTION DF (X)
C----------------------------------------------------------------------
C
C Definisi derivasi fungsi dengan pilihannya ditentukan
C dari program utama
C
C----------------------------------------------------------------------

C ---------------------------------
C GUNAKAN PILIHAN DALAM MAIN PROGRAM
C ---------------------------------
 COMMON /PILIHAN/IPILIH

C ---------------------------
C GUNAKAN FUNGSI YANG TERPILIH
C ---------------------------
 GOTO (1,2,3,4,5) IPILIH

1 DF = -1.5 + 2.0*X
 RETURN

2 DF = 5.0*X**4 - 15.0*X**2 - 20.0
 RETURN

3 DF = - 12.0/X**2 + 108.0
 RETURN

4 DF = EXP(X) - 1
 RETURN

5 DF = -12.0*X**2 + 14.0*X + 4.0
 RETURN

 END
```

3.8 Contoh Hasil

Beberapa contoh hasil dari eksekusi program utama disajikan di bawah ini.

```
Iterasi maximum yang dipakai : 1000

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 1
Ketelitian : 1.E-7
X titik lereng: 10

Interval minimum: [ 9.185240 ] [ 0.7424081 ] [ -12.91838 ]
Nilai fungsinya : [ 70.59077 ] [ -0.5624424 ] [ 186.2621 ]

-------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
-------------------------------------
```

```
Rasio Emas 0.7501726 -0.5625000
Brent 0.7501317 -0.5625000
Brent plus 0.7500000 -0.5625000
-------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 2
Ketelitian : 1.E-8
X titik lereng: 10
*** MNBRAK melebihi iterasi maximum

Interval minimum: [ 10.00000 ] [ 10.00000 ] [ 10.00000 ]
Nilai fungsinya : [ 94805.00 ] [ 94805.00 ] [ 94805.00 ]

-------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
-------------------------------------
Rasio Emas 10.00000 94805.00
*** MNBRAK melebihi iterasi maximum
Brent 10.00000 94805.00
Brent plus 10.00000 94805.00
-------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 2
Ketelitian : 1.E-6
X titik lereng: 2

Interval minimum: [ 2.000095 ] [ 2.000164 ] [ 2.000275 ]
Nilai fungsinya : [ -43.00000 ] [ -43.00000 ] [ -43.00000 ]

-------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
-------------------------------------
Rasio Emas 2.000097 -43.00000
Brent 2.000140 -43.00000
Brent plus 2.000097 -43.00000
-------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
```

```
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 3
Ketelitian : 1.E-8
X titik lereng: 0.0001

Interval minimum: [ 0.3037111 ] [ 0.3315563 ] [ 0.3374541 ]
Nilai fungsinya : [ -647.6880 ] [ -647.9990 ] [ -647.9946 ]

-------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
-------------------------------------
Rasio Emas 0.3330266 -648.0000
*** MNBRAK melebihi iterasi maximum
Brent 0.3331557 -648.0000
*** BRENT melebihi iterasi maximum
Brent plus 0.3333333 -648.0000
*** DBRENT melebihi iterasi maximum
-------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 2
Ketelitian : 1.E-6
X titik lereng: 0.00001

Interval minimum: [ 0.8319921 ] [ 1.503763 ] [ 2.590710 ]
Nilai fungsinya : [ -14.12076 ] [ -34.38809 ] [ -17.04929 ]

-------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
-------------------------------------
Rasio Emas 1.999805 -43.00000
Brent 2.000001 -43.00000
Brent plus 1.999998 -43.00000
-------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 4
Ketelitian : 1.E-8
X titik lereng: 0

Interval minimum: [ 1.3623823E-04] [ 2.2053809E-04] [ 3.5693811E-04]
```

```
Nilai fungsinya : [ 1.000000 ] [ 1.000000 ] [ 1.000000 ]

-------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
-------------------------------------
Rasio Emas 1.3623825E-04 1.000000
*** MNBRAK melebihi iterasi maximum
Brent 3.3703781E-04 1.000000
Brent plus 1.3623839E-04 1.000000
-------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 4
Ketelitian : 1.E-7
X titik lereng: 0

Interval minimum: [ 1.9738701E-04] [ 3.2037889E-04] [ 5.1938393E-04]
Nilai fungsinya : [ 1.000000 ] [ 1.000000 ] [ 1.000000 ]

-------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
-------------------------------------
Rasio Emas 1.9738702E-04 1.000000
Brent 2.7340036E-04 1.000000
Brent plus 1.9738724E-04 1.000000
-------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 4
Ketelitian : 1.E-7
X titik lereng: -2

Interval minimum: [ -1.995917 ] [ -1.598671 ] [ 3.562356 ]
Nilai fungsinya : [ 2.131806 ] [ 1.800836 ] [ 31.68378 ]

-------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
-------------------------------------
Rasio Emas -3.4528683E-04 1.000000
Brent -1.1883662E-05 1.000000
Brent plus -9.5139882E-11 1.000000
-------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
```

```
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 5
Ketelitian : 1.E-8
X titik lereng: 10
*** MNBRAK melebihi iterasi maximum

Interval minimum: [ 10.00000 ] [ 10.00000 ] [ 10.00000 ]
Nilai fungsinya : [ -3266.000 ] [ -3266.000 ] [ -3266.000 ]

-------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
-------------------------------------
Rasio Emas 10.00000 -3266.000
*** MNBRAK melebihi iterasi maximum
Brent 10.00000 -3266.000
Brent plus 10.00000 -3266.000
-------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 5
Ketelitian : 1.E-7
X titik lereng: -10

Interval minimum: [ 1.2998976E+38] [ 2.1032786E+38] [ INF ]
Nilai fungsinya : [ -INF ] [ -INF ] [ NAN(255) ]

-------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
-------------------------------------
Rasio Emas INF NAN(255)
Brent 1.2998978E+38 -INF
Brent plus 2.1032786E+38 -INF
*** DBRENT melebihi iterasi maximum
-------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 5
```

```
Ketelitian : 1.E-7
X titik lereng: 100
*** MNBRAK melebihi iterasi maximum

Interval minimum: [ 100.0000 ] [ 100.0000 ] [ 100.0000 ]
Nilai fungsinya : [ -3929606. ] [ -3929606. ] [ -3929606. ]

-------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
-------------------------------------
Rasio Emas 100.0000 -3929606.
*** MNBRAK melebihi iterasi maximum
Brent 100.0000 -3929606.
Brent plus 100.0000 -3929606.
-------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 5
Ketelitian : 1.E-8
X titik lereng: -100
*** MNBRAK melebihi iterasi maximum

Interval minimum: [ -100.0000 ] [ -100.0000 ] [ -100.0000 ]
Nilai fungsinya : [ 4069594. ] [ 4069594. ] [ 4069594. ]

-------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
-------------------------------------
Rasio Emas -100.0000 4069594.
*** MNBRAK melebihi iterasi maximum
Brent -100.0000 4069594.
Brent plus -100.0000 4069594.
-------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 5
Ketelitian : 1.E-8
X titik lereng: -2

Interval minimum: [ -1.983102 ] [ -0.8338270 ] [ 1.025739 ]
Nilai fungsinya : [ 44.79218 ] [ -2.149505 ] [ 1.151054 ]

-------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
-------------------------------------
Rasio Emas -0.2376102 -6.501570
```

```
*** MNBRAK melebihi iterasi maximum
Brent -0.2374042 -6.501570
*** BRENT melebihi iterasi maximum
Brent plus -0.2374048 -6.501570
*** DBRENT melebihi iterasi maximum
------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 5
Ketelitian : 1.E-8
X titik lereng: -1

Interval minimum: [ -0.8247265 ] [ -0.3986694 ] [ 0.2907054 ]
Nilai fungsinya : [ -2.293861 ] [ -6.228663 ] [ -4.343880 ]

------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
------------------------------------
Rasio Emas -0.2376102 -6.501570
*** MNBRAK melebihi iterasi maximum
Brent -0.2374176 -6.501570
*** BRENT melebihi iterasi maximum
Brent plus -0.2374048 -6.501570
*** DBRENT melebihi iterasi maximum
------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 5
Ketelitian : 1.E-7
X titik lereng: -1

Interval minimum: [ -0.9834749 ] [ -0.4190033 ] [ 0.4943310 ]
Nilai fungsinya : [ 0.6416185 ] [ -6.152820 ] [ -2.795319 ]

------------------------------------
Metode Xmin F(Xmin)
------------------------------------
Rasio Emas -0.2376102 -6.501570
Brent -0.2374140 -6.501570
Brent plus -0.2374048 -6.501570
------------------------------------

PAUSE ... tekan kunci: RETURN

************************************
* Pilih salah satu fungsi: *
```

```
* *
* 1. f(x) = -x(1.5-x) *
* 2. f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 5 *
* 3. f(x) = -720 + 12/x +108x *
* 4. f(x) = e^x - x *
* 5. f(x) = -4x^3 + 7x^2 + 4x - 6 *
* 6. Bubar/Wegah/Ngantuk *
* *
************************************
Pilihan anda : 6

STOP The job was well done sir ! Good luck !
```

Canter, Larry W., 1977, "Environmental Impact Assessment," McGraw–Hill Book Company, New York.

Daellenbach, Hans G., John A. George, Donald C. McNickle, 1983, "Introduction to Operations Research Techniques," Second Edition, Allyn and Bacon, Inc., Boston.

Gillet, Billy E., 1979, "Introduction to Operations Research, A Computer-Oriented Algoritmic Approach," Tata McGraw–Hill Publishing Company Ltd, New Delhi.

Haimes, Yacov Y., 1977, "Hierarchical Analyses of Water Resources Systems, Modeling and Optimization of Large–Scale Systems," McGraw–Hill Series in Water Resources and Environmental Engineering, McGraw–Hill International Book Company, New York.

Haith, Douglas A., 1982, "Environmental Systems Optimization," John Wiley & Son, New York.

Loucks, Daniel P., Jery R. Stedinger, Douglas A. Haith, 1981, "Water Resource Systems Planning and Analysis," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.

Press, William H., Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, 1987, "Numerical Recipes The Art of Scientific Computing," Cambridge University Press, Cambridge, New York.

Rao, S.S., 1977, "Optimization Theory and Applications," Wiley Eastern Limited, New Delhi.

Swokowski, Earl W., 1983, "Calculus with Analytic Geometry," Alternate Edition, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Massachusetts.

Wolfram, Stephen, 1988, "Mathematica™ – A System for Doing Mathematics by Computer," Addison-Wesley Publishing Company, Inc., The Advanced Book Program, Redwood City, California.