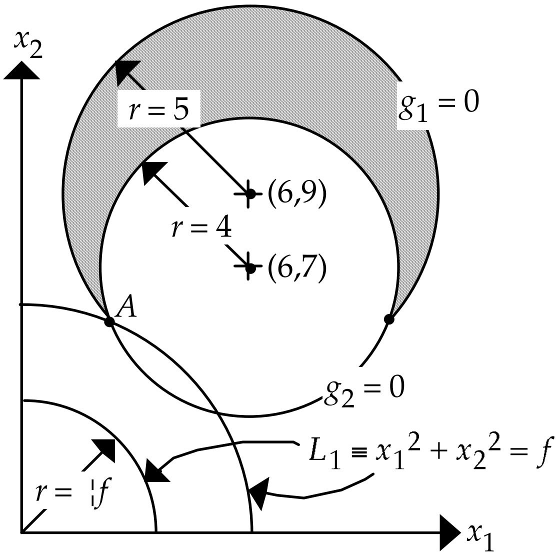
1

Minimumkan $f(\bar{x}) = x_1{}^2 + x_2{}^2$

dengan kendala
$$g_1(\bar{x}) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 9)^2 - 25 \le 0$$
$$g_2(\bar{x}) = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 7)^2 - 16 \ge 0$$
$$g_3(\bar{x}) = x_1 \ge 0$$
$$g_4(\bar{x}) = x_2 \ge 0$$

Jawaban:

- Melihat bentuk fungsi tujuan dan kendalanya yang merupakan persamaan lingkaran, maka penyelesaiannya akan menggunakan sifat-sifat lingkaran.



- Daerah yang diarsir adalah daerah yang memenuhi kendala yang ada.
- Fungsi tujuan dapat diminimumkan dengan mencari jari-jari lingkaran L_1 yang berjari-jari minimum yang memenuhi kendala. Jadi dalam gambar di atas, titik A adalah titik yang memenuhi kendala yang membuat jari-jari lingkaran L_1 minimum.
- Mencari titik A dengan mencari titik potong lingkaran g_1 dan g_2.

$$\begin{array}{l} (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 9)^2 = 25 \\ \underline{(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 7)^2 = 16} \; - \\ (x_2 - 9)^2 - (x_2 - 7)^2 = 09 \end{array}$$

$$\left(x_2{}^2 - 18\,x_2 + 81\right) - \left(x_2{}^2 - 14\,x_2 + 49\right) = 09$$
$$x_2 = \frac{9 + 49 - 81}{-4} = \frac{-23}{-4} = 5.75 \;\Rightarrow\; x_1 = 2.2$$

Jadi: $\boxed{\begin{aligned} f_{min} &= x_1{}^2 + x_2{}^2 = 2.2^2 + 5.75^2 \\ &= 37.904 \end{aligned}}$

2 Minimumkan $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 2x_1{}^2 + 2x_1x_2 + x_2{}^2$

Jawaban:

⇨ Syarat perlu untuk mencari minimum adalah:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 + 4x_1 + 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -1 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \quad -$$

$$2 + 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$\Rightarrow x_2 = 1.5$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} = 4, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} = 2$$

$$\text{Hessian} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H^{(1)} = 4, H^{(2)} = 8 - 4 = 4$$

Jadi Hessian definit positif, oleh karena itu $x_1 = -1$, $x_2 = 1.5$ adalah titik minimum dengan nilai f minimum adalah:

$$\boxed{f_{min} = -1 - 1.5 + 2 - 3 + 2.25 = -1.25}$$

3 Minimumkan $f(\bar{x}) = x_1{}^2 + x_2{}^2 - 4x_1 - 4x_2 + 8$

dengan kendala $g(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 - 4 \le 0$

Jawaban:

➔ Melihat bentuk fungsi tujuan yaitu $L_1 \equiv (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = f$ yang merupakan persamaan lingkaran, maka sifat-sifat lingkaran akan digunakan dalam penyelesaian soal ini.

➔ Daerah yang diarsir adalah daerah penyelesaian. Lingkaran L_1 dapat dibuat minimum sehingga menyinggung garis g di titik A. Jadi $f = AB$.

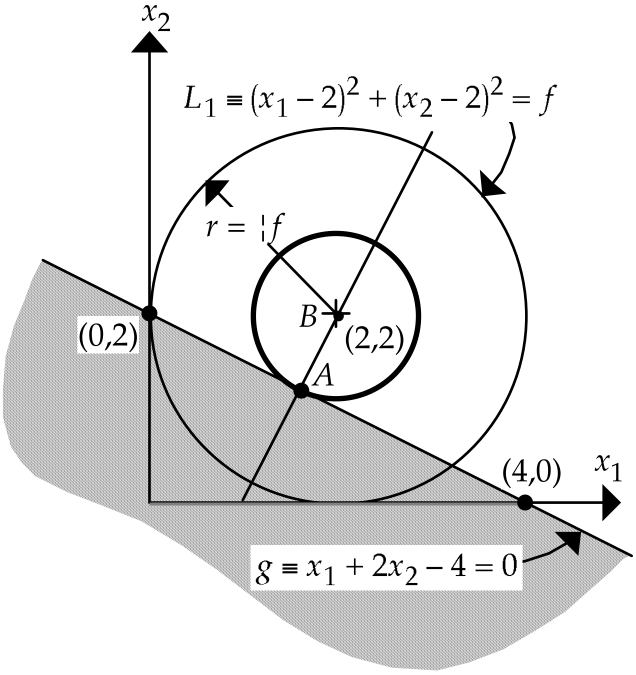
➔ Mencari titik A:

$$\text{Grs } g \equiv x_1 + 2x_2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\mathrm{m}_g} x_1 + 2$$

$$\text{Grs } AB \equiv x_2 - 2 = \underbrace{2}_{-\frac{1}{\mathrm{m}_g}} (x_1 - 2) \;\Rightarrow\; x_2 - 2 = 2x_1 - 4$$

$$\begin{array}{rl} \text{Grs } g \equiv 2x_1 + 4x_2 - 8 = 0 & \\ \text{Grs } AB \equiv 2x_1 - x_2 - 2 = 0 & - \\ \hline 5x_2 - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 1.2 & \\ \Rightarrow\; x_1 = 1.6 & \end{array}$$

Jadi koordinat titik A adalah (1.6, 1.2).



➔ Jadi: $\boxed{f_{\min} = (1.6 - 2)^2 + (1.2 - 2)^2 = 0.80}$

4

Maximumkan $f(\bar{x}) = x_1 x_2 x_3$ (1)

dengan kendala $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 72$ (2)

$$x_1 \leq 42 \quad (3)$$
$$x_1 \geq 0 \quad (4)$$
$$x_2 \geq 0 \quad (5)$$
$$x_3 \geq 0 \quad (6)$$

Jawaban:

- Digunakan cara sebagai berikut: dari Pers.(4) s/d (6) diperoleh kesimpulan bahwa x_i selalu positif, maka dari Pers.(2) didapat hasil sebagai berikut:

$$x_2 \leq 36 - \frac{x_1}{2} - x_3$$

jadi batas atas bagi x_2 adalah 36 atau $0 \leq x_2 \leq 36$. Demikian pula untuk x_3 serupa: $0 \leq x_3 \leq 36$, sedangkan $x_1 : 0 \leq x_1 \leq 42$.

- Misalkan: $y_3 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$, maka $x_3 = \frac{1}{2}(y_3 - x_1 - 2x_2)$ sehingga $0 \leq y_3 \leq 72$.

Jadi problem di atas menjadi:

Maximumkan $f(\bar{x}) = x_1 x_2 \frac{1}{2}(y_3 - x_1 - 2x_2)$

dengan kendala $0 \leq x_1 \leq 42$
$0 \leq x_2 \leq 36$
$0 \leq y_3 \leq 72$

Kendala ini secara otomatis dapat dipenuhi oleh persamaan sebagai berikut:
$x_1 = 42 \sin^2 x$
$x_2 = 36 \sin^2 y$
$y_3 = 72 \sin^2 z$

- Jadi problem di atas menjadi:

Maximumkan:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= (42 \sin^2 x)(36 \sin^2 y) \bullet \frac{1}{2}(72 \sin^2 z - 42 \sin^2 x - 72 \sin^2 y) \\ &= 4536 \ \sin^2 x \bullet \sin^2 y \bullet (12 \sin^2 z - 7 \sin^2 x - 12 \sin^2 y) \end{aligned}$$

tanpa kendala!

- Syarat perlu untuk mencapai nilai ekstrim adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4536 \bullet 2 \sin x \cos x \sin^2 y \,(12 \sin^2 z - 7 \sin^2 x - 12 \sin^2 y) + \\ &\quad 4536 \bullet \sin^2 x \sin^2 y \,(-14 \sin x \cos x) = 0 \qquad (7) \\ &= 4536 \bullet 4 \sin x \cos x \sin^2 y \,(6 \sin^2 z - 7 \sin^2 x - 6 \sin^2 y) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4536 \bullet 2 \sin y \cos y \sin^2 x \left(12 \sin^2 z - 7 \sin^2 x - 24 \sin^2 y\right) = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 4536 \bullet 24 \sin z \cos z \sin^2 x \sin^2 y = 0 \tag{9}$$

✧ Dari Pers.(9) diperoleh:

$\sin z = 0$ atau $\cos z = 0$ atau $\sin x = 0$ atau $\sin y = 0$

tetapi jika $\sin x = 0$ atau $\sin y = 0$, maka dari Pers.(7) & (8) tampak bahwa informasi mengenai z tidak dapat diperoleh, demikian pula jika $\sin z = 0$.

Oleh karena itu penyelesaiannya adalah $\cos z = 0$ atau $\sin^2 z = 1$, sehingga terdapat 4 kemungkinan penyelesaian:

$$\left\{\begin{array}{r} \cos x = 0 \\ \cos y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin^2 x = 1 \\ \sin^2 y = 1 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{r} \cos x = 0 \\ 12 \sin^2 z - 7 \sin^2 x - 24 \sin^2 y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin^2 x = 1 \\ \sin^2 y = \frac{5}{24} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{r} 6 \sin^2 z - 7 \sin^2 x - 6 \sin^2 y = 0 \\ \cos y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \text{tidak berlaku} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{r} 6 \sin^2 z - 7 \sin^2 x - 6 \sin^2 y = 0 \\ 12 \sin^2 z - 7 \sin^2 x - 24 \sin^2 y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 18 \sin^2 y = 6 \Rightarrow \sin^2 y = \frac{1}{3} \\ \sin^2 x = \frac{4}{7} \end{array}\right\}$$

Untuk nilai-nilai:

$\sin^2 x = \sin^2 y = \sin^2 z = 1$

maka $f_{opt} = -4536 \bullet 7 = -31752$

Untuk nilai-nilai:

$\sin^2 x = 1$, $\sin^2 y = 5/24$, $\sin^2 z = 1$

maka $f_{opt} = 4536 \bullet (5/24) \bullet [12 - 7 - 12 \bullet (5/24)] = 2362.5$

Untuk nilai-nilai:

$\sin^2 x = 4/7$, $\sin^2 y = 1/3$, $\sin^2 z = 1$

maka $f_{opt} = 4536 \bullet (4/7) \bullet (1/3) \bullet (12 - 4 - 4) = 3456$

✧ Jadi nilai-nilai yang berlaku adalah

$f_{max} = 3456$

untuk nilai x, y, dan z sebagai berikut:

$x_1 = 42 \sin^2 x = 42 \bullet (4/7) = 24$

$x_2 = 36 \sin^2 y = 36 \bullet (1/3) = 12$

$x_3 = 0.5 \bullet (72 \sin^2 y - x_1 - 2\,x_2) = 0.5 \bullet (72 - 24 - 24) = 12$

✧ Jadi:

$\boxed{f_{\max} = 3456 \text{ pada titik } (24{,}12{,}12)}$

5 Maximumkan $f(\bar{x}) = -x_1^2 - x_2^2 + 8x_1 + 4x_2$

dengan kendala
$$g_1(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \le 24$$
$$g_2(\bar{x}) = -5x_1 + 12x_2 \le 24$$
$$g_3(\bar{x}) = x_2 \le 5$$

dengan syarat Kuhn–Tucker.

Jawaban:

❍ Syarat Kuhn–Tucker:

I. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_i} + \lambda_3 \dfrac{\partial g_3}{\partial x_i} = 0,\ i = 1,2$

$8 + x_2 - 2x_1 + \lambda_1(2) + \lambda_2(-5) + \lambda_3(0) = 0$

$4 + x_1 - 2x_2 + \lambda_1(3) + \lambda_2(12) + \lambda_3(1) = 0$

atau

$$-2x_1 + x_2 + 2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 8 = 0 \qquad (1)$$

$$x_1 - 2x_2 + 3\lambda_1 + 12\lambda_2 + \lambda_3 + 4 = 0 \qquad (2)$$

II. $\lambda_j \bullet g_j = 0,\ j = 1,2,3$

$$\lambda_1(2x_1 + 3x_2 - 24) = 0 \qquad (3)$$

$$\lambda_2(-5x_1 + 12x_2 - 24) = 0 \qquad (4)$$

$$\lambda_3(x_2 - 5) = 0 \qquad (5)$$

III. $g_j \le 0,\ j = 1,2,3$

IV. $\lambda_j \le 0,\ j = 1,2,3$

❍ Dari Pers.(5) terdapat dua kemungkinan penyelesaian: $\lambda_3 = 0$ atau $x_2 = 5$

❖ Kasus I: $\lambda_3 = 0$

$$\begin{array}{rl} 2\bullet(1): -4x_1 + 2x_2 + 4\lambda_1 - 10\lambda_2 + 16 = 0 & \\ x_1 - 2x_2 + 3\lambda_1 + 12\lambda_2 + 04 = 0 & + \\ \hline -3x_1 - 0x_2 + 7\lambda_1 + 02\lambda_2 + 20 = 0 & \end{array}$$

$$x_1 = \frac{7}{3}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2 + \frac{20}{3} \qquad (6)$$

$$x_2 = \frac{8}{3}\lambda_1 + \frac{19}{3}\lambda_2 + \frac{16}{3} \qquad (7)$$

Masukkan Pers.(6) & (7) kedalam Pers(3) & (4):

$\lambda_1 \bullet (38\lambda_1 + 61\lambda_2 + 88) = 0$ **dan** $\lambda_2 \bullet (61\lambda_1 + 218\lambda_2 + 92) = 0$

a. $\lambda_1 = 0 \Rightarrow 218\lambda_2 + 92 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -0.422$, dari Pers.(6) & (7)

$$\left.\begin{array}{r} \therefore x_1 = 6.385 \\ x_2 = 2.661 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g_1 = 20.75 \\ g_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sesuai} \Rightarrow f = 30.86$$

b. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_2 = 0$, dari Pers.(6) & (7)

$$\left.\begin{array}{r} \therefore x_1 = 20/3 \\ x_2 = 16/3 \end{array}\right\} \Rightarrow g_1 = 2\left(\frac{20}{3}\right) + 3\left(\frac{16}{3}\right) = 29 > 24 \Rightarrow \text{tidak sesuai}$$

c. $\lambda_2 = 0 \Rightarrow 38\lambda_1 + 88 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2.316$, dari Pers.(6) & (7)

$$\left.\begin{array}{r} \therefore x_1 = 1.263 \\ x_2 = 4.1818 \end{array}\right\} \Rightarrow g_2 = 43.866 > 24 \Rightarrow \text{tidak sesuai}$$

d.
$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + 61\lambda_2 + 88 = 0 \\ 61\lambda_1 + 218\lambda_2 + 92 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_2 = 0.4103 > 0 \Rightarrow \text{tidak sesuai}$$

❖ Kasus II: $x_2 = 5$

Pers.(1) & (2) menjadi:

$$\left.\begin{array}{r} -2x_1 + 2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 13 = 0 \\ x_1 + 3\lambda_1 + 12\lambda_2 + \lambda_3 - 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 8\lambda_1 + 19\lambda_2 + 2\lambda_3 + 1 = 0 \qquad (8)$$

Pers.(3) & (4) menjadi:

$$\lambda_1 \bullet (2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 4) = 0 \qquad (9)$$

$$\lambda_2 \bullet (-5\lambda_1 + 12.5\lambda_2 + 3.5) = 0 \qquad (10)$$

a. $\lambda_1 = 0 \Rightarrow 12.5\lambda_2 = -3.5 \Rightarrow \lambda_2 = -0.28$, dari Pers.(8) diperoleh:

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2}(-19 \bullet 0.28 + 1) = 2.16 > 0 \Rightarrow \text{tidak sesuai}$$

b. $\lambda_2 = 0 \Rightarrow 2\lambda_1 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2$, dari Pers.(8) diperoleh:

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2}(-8 \bullet 2 + 1) = 7.5 > 0 \Rightarrow \text{tidak sesuai}$$

c.
$$\left.\begin{array}{r} 2\lambda_1 - 5\lambda_2 + 4 = 0 \Rightarrow 10\lambda_1 - 25\lambda_2 + 20 = 0 \\ -5\lambda_1 + 12.5\lambda_2 + 3.5 = 0 \Rightarrow 10\lambda_1 - 25\lambda_2 - 7 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{mustahil}$$

- Jadi:

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{\max} = 30.86 \text{ pada titik } (6.385, 2.661) \\ \qquad\qquad \text{untuk } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -0.422,\ \lambda_3 = 0 \end{array}}$$