VIII. PENYELESAIAN NUMERIS PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Dalam bidang teknik sering dijumpai persamaan suatu fenomena alam yg dinyatakan dalam pers. dif. biasa (PDB).
Contoh :

Problem nilai awal : $y' = f(x, y)$ dimana $y(x_0) = Y_0$

Problem nilai batas : $y'' = g(x, y, y')$ dimana $a < x < b$

$$A \begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u(b) \\ u'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

dimana A & B adalah matrix 2×2
dan γ_1 & γ_2 konstanta yg telah diket.

Taylor series.
Taylor mengatakan bahwa suatu fungsi dgn sifat tertentu dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \cdots$$

atau

$$y(x) = y_0 + \frac{h}{1!} y_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \cdots + \frac{h^n}{n!} y_0^{(n)} + \cdots \qquad h = x - x_0$$

Deret ini akan digunakan dalam bab ini

Contoh : $y' - \frac{1}{2} y = 0, \quad y(0) = 1$

Secara analitis $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} y \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} dx$

$$\int \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \int dx$$

Jadi $\ln y = \frac{1}{2} x + c \rightarrow y = e^{x/2} + C$

Jika $y(0) = 1 \rightarrow 1 = e^{0/2} + C \rightarrow C = 0$

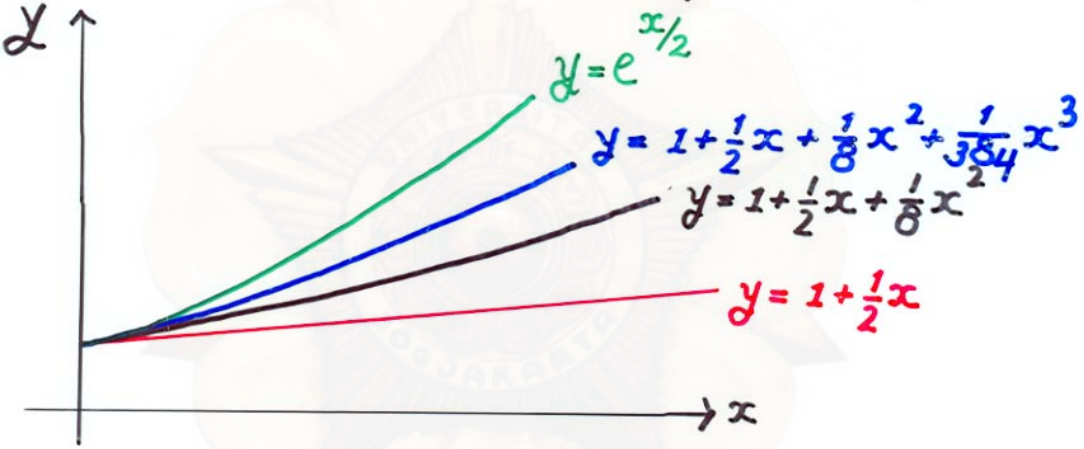
Maka secara analitis : $y = e^{x/2}$

Dengan deret Taylor dpt diselesaikan sbb:

Pers. asli:

$$y' = \frac{1}{2}y \qquad y(0) = 1 \qquad x_0 = 0$$
$$y'' = \frac{1}{2}y' \qquad y'(0) = \frac{1}{2}$$
$$y''' = \frac{1}{2}y'' \qquad y''(0) = \frac{1}{4}$$
$$y'''' = \frac{1}{2}y''' \qquad y''''(0) = \frac{1}{8}$$

Jadi $y(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{384}x^4 + \cdots$



Cara numerik untuk menyelesaikan problem nilai awal adalah metoda diferensi hingga. Pada metoda diferensi hingga penyelesaian pendekatan didapat pada titik-titik hitung

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots$$

dan nilai pendekatan pada setiap x_n diperoleh dengan menggunakan nilai-nilai yg didpt sebelumnya.

Ditinjau PDB : $y' = f(x,y), \ y(x_0) = Y_0$

Penyelesaian sesungguhnya ditulis $Y(x)$, sehingga pers. diatas menjadi :

$$Y'(x) = f(x, Y(x)), \quad Y(x_0) = Y_0$$

Penyelesaian pendekatannya ditulis $y(x)$, dan nilai $y(x_0)$, $y(x_1), \ldots, y(x_n), \ldots$ atau ditulis sebagai $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$. Sebuah pias $h > 0$ digunakan utk mendefinisikan ttk-ttk hitung

$$x_j = x_0 + jh \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Jika akan diadakan perbandingan penyelesaian pendekatan utk beberapa nilai h, maka $y_h(x)$ digunakan utk menyatakan $y(x)$ dgn pias h.

VII.1. Metoda Euler

Dengan deret Taylor hitung $Y(x_{n+1})$ dgn menggunakan $Y(x_n)$

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + h Y'(x_n) + \frac{h^2}{2} Y''(\xi_n)$$

dimana $x_n \leqslant \xi_n \leqslant x_{n+1}$

Rumus Euler menjadi : $y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

dengan $y_0 \doteq Y_0$

Kesalahan diskritisasi adalah

$$Y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2} Y''(\xi_n)$$

Contoh : PDB $y' = y$, $y(0) = 1$ $\longrightarrow$ $Y(x) = e^x$

Rumus Euler uth $h = 0.2$

$$y_{n+1} = y_n + 0.2\,y_n = 1.2\,y_n$$

$\therefore\ y_1 = 1.2\,y_0 = 1.2 \times 1 = 1.2$

$\quad\ y_2 = 1.2\,y_1 = 1.2 \times 1.2 = 1.44$

Jika ditabelkan :

	x	$y_h(x)$	$Y(x)$	$Y(x) - y_h(x)$
$h = 0.2$	0.4	1.44000	1.49182	.05182
	0.8	2.07360	2.22554	.15194
	1.2	2.98598	3.32012	.33413
	1.6	4.29982	4.95303	.65321
	2.0	6.19174	7.38906	1.19732
$h = 0.1$	0.4	1.46410	$\uparrow$	.02772
	0.8	2.14359		.08195
	1.2	3.13843	s.d.a	.18169
	1.6	4.59497		.35806
	2.0	6.72750	$\downarrow$	.66156

Perhatikan bahwa kesalahan menurun $\frac{1}{2}$ dari nilai pertama karena h dikecilkan $\frac{1}{2}$ kali

VII. 2. Metoda 'Multi - step'

Secara umum rumus langkah majemuk dapat ditulis sbg :

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j\, y_{n-j} + h \sum_{j=-1}^{p} b_j\, f(x_{n-j}, y_{n-j}) \qquad n \geq p$$

Koefisien $a_0, \ldots, a_p, b_{-1}, b_0, \ldots, b_p$ adalah suatu konstanta, dan $p \geqslant 0$.
Jika $a_p \neq 0$ dan $b_p \neq 0$, metoda ini disebut metoda langkah $(p+1)$, karena $(p+1)$ nilai pendekatan sebelumnya digunakan utk menghitung y_{n+1}. Nilai $y_1, \ldots, y_p$ harus dihitung dgn cara lain.

Metoda Euler adalah metoda langkah tunggal karena $p=0$, dan $a_0 = 1$, $b_{-1} = 0$, $b_0 = 1$.

Jika $b_{-1} = 0$, maka y_{n+1} hanya terdapat pada ruas kiri, sehingga rumusnya disebut rumus eksplisit.
Jika $b_{-1} \neq 0$, maka y_{n+1} terdapat di ruas kanan maupun kiri, sehingga disebut rumus implisit.

Koefisien a_j & b_j dapat dihitung dari

$$\sum_{j=0}^{p} a_j = 1 \qquad -\sum_{j=0}^{p} j a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j = 1$$

$$\sum_{j=0}^{p} (-j)^i a_j + i \sum_{j=-1}^{p} (-j)^{i-1} b_j = 1 \qquad i = 2, \ldots, m$$

Rumus terakhir menjamin bahwa $Y(x)$ dpt diderivasikan $(m+1)$ kali.

Jika $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $b_{-1} = 0$, $b_0 = 2$, maka didapat rumus untuk metoda titik tengah

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2h f(x_n, y_n) \qquad n \geqslant 1$$

merupakan metoda langkah ganda yg explisit.

Jika $a_0 = 1$, $b_{-1} = b_0 = \frac{1}{2}$, maka didapat rumus trapesium yang implisit dan merupakan metoda langkah tunggal:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right] \qquad n \geq 0$$

- Metoda trapesium.

Metoda ini dpt pula dijabarkan dari:

$$Y'(t) = f(t, Y(t))$$

diintegrasikan dari $[x_n, x_{n+1}]$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} Y'(t)\,dt = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, Y(t))\,dt$$

$$Y(x_{n+1}) - Y(x_n) = \frac{1}{2}h\left[f(x_n, Y(x_n)) + f(x_{n+1}, Y(x_{n+1}))\right] - \frac{h^3}{12}Y'''(\xi_n) \qquad x_n \leq \xi_n \leq x_{n+1}$$

sehingga pendekatannya menjadi

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

Karena rumusnya implisit, maka y_{n+1} dapat dihitung dgn iterasi, jadi secara umum:

$$y_{n+1}^{(j+1)} = y_n + \frac{1}{2}h\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(j)})\right] \qquad j = 0, 1, \ldots$$

Langkah-langkah hitungan:

0. x_n, y_n telah diket./dihitung pada langkah sebelumnya
1. $y_{n+1}^{(0)}$ diprakirakan dgn rumus eksplisit, misalkan

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

2. $y_{n+1}^{(0)}$ dimasukkan kedalam ruas kanan shg $y_{n+1}^{(1)}$ dpt dihitung

3. langkah 2 diulang s/d ketelitian yg dikehendaki

Walaupun secara umum dpt diselesaikan dgn iterasi, tetapi mungkin dapat diselesaikan dgn cara lain atau bahkan tanpa iterasi tergantung dari $f(x,y)$.

Contoh $y' = y \qquad y(0) = 1$

Karena $f(x,y) = y$, maka $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\,(y_n + y_{n+1})$

$$y_{n+1} = \frac{1 + h/2}{1 - h/2}\, y_n$$

Untuk $h = 0.2 \rightarrow y_{n+1} = \frac{1.1}{0.9}\, y_n = 1.2222\, y_n$

$y_1 = 1.2222\, y_0 = 1.2222 \times 1$

$y_2 = 1.2222\, y_1 = 1.2222 \times 1.2222 = 1.49383$

Jika ditabelkan :

x	$y_h(x)$	$Y(x)$	$Y(x) - y_h(x)$
0.4	1.49383	1.49182	-0.00200
0.8	2.23152	2.22554	-0.00598
1.2	3.33350	3.32012	-0.01339
1.6	4.97968	4.95303	-0.02665
2.0	7.43878	7.38906	-0.04972

VII.3. Metoda Runge - Kutta (RK)

Metoda RK merupakan metoda langkah tunggal yang lebih teliti dibandingkan metoda Euler.

Semua metoda RK dapat ditulis sebagai :

$$y_{i+1} = y_i + h\,\phi(x_i, y_i, h)$$

dimana $\phi(x_i, y_i, h)$ disebut fungsi penambah

Metoda RK derajad dua :

$$\phi = ak_1 + bk_2$$

dimana $k_1 = f(x_i, y_i)$

$$k_2 = f(x_i + ph,\ qhf(x_i, y_i) + y_i)$$
$$= f(x_i + ph,\ qhk_1 + y_i)$$

dimana a, b, p, q akan ditentukan kemudian.

Ditinjau deret Taylor utk 2 variabel (x, y) :

$$f(x+r, y+s) = f(x,y) + rf_x(x,y) + sf_y(x,y) + \frac{1}{2}r^2 f_{xx}(x,y) + rs f_{xy}(x,y) + \frac{1}{2}s^2 f_{yy}(x,y) + O\left[(|r|+|s|)^3\right]$$

$$\therefore k_2 = f(x_i, y_i) + phf_x(x_i, y_i) + k_1 qh f_y(x_i, y_i) + O(h^2)$$

Jadi $y_{i+1} = y_i + h\phi(x_i, y_i, h)$

$$= y_i + h\left[af(x_i, y_i) + bf(x_i, y_i)\right] + h^2\left[pbf_x(x_i, y_i) + bqf(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i)\right] \quad (A)$$

Dengan deret Taylor :

$$y_{i+1} = y_i + hy'(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} y'_x(x_i, y_i) + \cdots$$

$$= y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2}\left[y''_i + y'_y y'\right] \quad (B)$$

$$= y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left[f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i)\right]$$

$A = B \rightarrow a + b = 1\ ,\ bp = \frac{1}{2}\ ,\ bq = \frac{1}{2}$

Tidak dpt diselesaikan karena hanya ada 3 pers. dgn 4 bil. anu yaitu a, b, p, q. Biasanya nilai b adalah $\frac{1}{2}$ atau 1.

- Untuk $b = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$, $p = q = 1$.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big[\underbrace{f(x_i, y_i)}_{\text{Slope di } x_i} + \underbrace{f(x_i + h, \underbrace{y_i + h f(x_i, y_i)}_{\text{Euler utk } y_{i+1}})}_{\substack{\text{Slope di } x_{i+1} \\ \text{dihitung dgn} \\ \text{metoda Euler}}}\Big] \qquad \text{(C)}$$

Jadi metoda RK dapat dipandang sebagai metoda 'predictor - corrector'

1. Langkah predictor :
   a. prakirakan $\bar{y}_{i+1}$ dg metoda Euler
   b. slope (y') dititik $(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$ adalah $f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$
2. Langkah corrector :
   a. hitung slope (y') dititik (x_i, y_i) yaitu $f(x_i, y_i)$
   b. hitung slope rerata $= [\text{slope}(1.b) + \text{slope}(2.a)]/2$
   c. hitung $y_{i+1} = y_i + h \times$ hasil (2.b).

- Untuk $b = 1$, $a = 0$, $p = q = \frac{1}{2}$

$$y_{i+1} = y_i + h\, f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h,\ y_i + \tfrac{1}{2}h f(x_i, y_i)\right)$$

- Metoda RK berderajad tiga :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h\left[k_1 + 4k_2 + k_3\right]$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h/2,\ y_i + \tfrac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_i + h,\ y_i + 2hk_2 - hk_1)$$

- Metoda RK4 :

a)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h,\ y_i + \tfrac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h,\ y_i + \tfrac{1}{2}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_i + h,\ y_i + hk_3)$$

b)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h/3,\ y_i + \tfrac{1}{3}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \tfrac{2}{3}h,\ y_i - \tfrac{1}{3}hk_1 + hk_2)$$

$$k_4 = f(x_i + h,\ y_i + hk_1 - hk_2 + hk_3)$$

c) yang paling banyak dipakai :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h\left[k_1 + (2-\sqrt{2})k_2 + (2+\sqrt{2})k_3 + k_4\right]$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h,\ y_i + \tfrac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \tfrac{1}{2}h,\ y_i + \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{2})hk_1 + (1-\tfrac{1}{\sqrt{2}})hk_2)$$

$$k_4 = f(x_i + h,\ y_i - \tfrac{1}{\sqrt{2}}hk_2 + (1+\tfrac{1}{\sqrt{2}})hk_3)$$

Contoh : $y' = \frac{1}{2}y \quad y(0) = 1 \longrightarrow$ eksak $Y(x) = e^{x/2}$

$Y(1) = e^{1/2} = 1.648721271$

Dgn RK4 : $f(x,y) = \frac{1}{2}y$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = \tfrac{1}{2} \times 1 = \tfrac{1}{2}$$

$$k_2 = f(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}hk_1) = f(0 + \tfrac{1}{2}\cdot 1,\ 1 + \tfrac{1}{2}\cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2})$$
$$= f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{4} = \tfrac{5}{8}$$

$$k_3 = f(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{2})hk_1 + (1-\tfrac{1}{\sqrt{2}})hk_2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[1 + \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{2})(1)(\tfrac{1}{2}) + (1-\tfrac{1}{\sqrt{2}})(1)(5/8)\right] = 0.64331$$

$$k_4 = f(x_0 + h,\ y_0 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}hk_2 + (1+\tfrac{1}{\sqrt{2}})hk_3)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1)(5/8) + (1+\tfrac{1}{\sqrt{2}})(1)(0.64331)\right] = 0.828125$$

$$y(1) = y(0) + \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2} + (2-\sqrt{2})\frac{5}{8} + (2+\sqrt{2})(0.64431) + 0.828125\right] = 1.6484375$$

VII.4. Algoritma 'Predictor-Corrector'

- Metoda langkah majemuk berdasarkan rumus integrasi. Secara umum metoda ini mengintegrasi PDB pada interval $[x_{i-k}, x_{i+1}]$ sbb

$$y' = f(x,y)$$

$$\int_{y_{i-k}}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx$$

$$y_{i+1} = y_{i-k} + \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} f(x,y)\,dx$$

$f(x,y)$ didekati polinomial derajad r, $\phi(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j x^j$

- Integrasi terbuka & beda terbagi mundur menghasilkan:

Untuk $k=0, r=3$:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}\right) \qquad O(h^5)$$

Untuk $k=1, r=1$:

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf_i \qquad O(h^3)$$

Untuk $k=3, r=3$:

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4}{3}h\left(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}\right) \qquad (I) \qquad O(h^5)$$

Untuk $k=5, r=5$

$$y_{i+1} = y_{i-5} + \frac{3}{10}h\left(11f_i - 14f_{i-1} + 26f_{i-2} - 14f_{i-3} + 11f_{i-4}\right) \qquad O(h^7)$$

- Integrasi tertutup & beda terbagi mundur menjadi :
  Untuk $k=0, r=3$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}) \qquad O(h^5)$$

Untuk $k=1, r=3$

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1}) \qquad (\mathrm{II}) \qquad O(h^5)$$

Untuk $k=3, r=5$

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{2h}{45}(7f_{i+1} + 32f_i + 12f_{i-1} + 32f_{i-2} + 7f_{i-3}) \qquad O(h^7)$$

- Kesulitan metoda langkah majemuk adalah pada saat permulaan y_{i-k} belum terhitung sehingga harus dihitung dgn cara lain, misalkan metoda Euler.

- Dari hasil di atas tampak bahwa integrasi terbuka memberikan rumus eksplisit → sehingga hitungan tidak menggunakan iterasi. Integrasi tertutup menghasilkan rumus implisit, sehingga membutuhkan iterasi

- Walaupun menggunakan iterasi, integrasi tertutup lebih disukai karena ketelitiannya lebih tinggi.
  Contoh :
  Pada (I) kesalahan : $\frac{14}{15} h^5 f^{(4)}(\xi) \qquad x_{i-3} \leq \xi \leq x_{i+1}$

  (II) kesalahan : $-\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\bar{\xi}) \qquad x_{i-1} \leq \bar{\xi} \leq x_{i+1}$

- Rumus Adam - Bashforth (eksplisit)

1. $Y_{n+1} = Y_n + hY_n' + \frac{1}{2}h^2 Y''(\xi_n)$

2. $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[3Y_n' - Y_{n-1}'\right] + \frac{5}{12}h^3 Y^{(3)}(\xi_n)$

3. $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{12}\left[23Y_n' - 16Y_{n-1}' + 5Y_{n-2}'\right] + \frac{3}{8}h^4 Y^{(4)}(\xi_n)$

4. $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{24}\left[55Y_n' - 59Y_{n-1}' + 37Y_{n-2}' - 9Y_{n-3}'\right] + \frac{251}{720}h^5 Y^{(5)}(\xi_n)$

- Rumus Adam-Moulton (implisit)

1. $Y_{n+1} = Y_n + hY_{n+1}' - \frac{1}{2}h^2 Y''(\xi_n)$

2. $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[Y_{n+1}' + Y_n'\right] - \frac{1}{12}h^3 Y^{(3)}(\xi_n)$

3. $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{12}\left[5Y_{n+1}' + 8Y_n' - Y_{n-1}'\right] - \frac{1}{12}h^4 Y^{(4)}(\xi_n)$

4. $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{24}\left[9Y_{n+1}' + 19Y_n' - 5Y_{n-1}' + Y_{n-2}'\right] - \frac{19}{720} Y^{(5)}(\xi_n)$

- Algoritma 'predictor - corrector'

Rumus A-M membutuhkan penyelesaian iterasi, sedangkan rumus A-B tidak, tetapi A-M ketelitiannya lebih tinggi. Algoritma 'predictor - corrector' berusaha menggabungkan keuntungan kedua rumus diatas, sbb :

a. gunakan rumus A-B utk memprakirakan Y_{n+1} (predictor : rumus A-B)

b. hitung Y_{n+1} memakai rumus A-M tanpa iterasi dgn memakai nilai Y_{n+1} dari a (corrector : rumus A-M)

Contoh :

1. A-B-M derajad 4 :

   a. predictor : A-B

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right]$$

   b. corrector : A-M

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right]$$

2. rumus Milne derajad 4 :

   a. predictor :

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left(2 f_n - f_{n-1} + 2 f_{n-2}\right)$$

   b. corrector :

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4 f_n + f_{n-1}\right)$$

Contoh penggunaan :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} y = 0 \qquad y(0) = 1 \rightarrow \text{hitung } y(1) = ?$$

Penyelesaian :

$$y' = \frac{1}{2} y \rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2} y$$

Catatan : solusi eksak $Y = e^{x/2}$

Diambil $h = 0.25$

Euler $y_{n+1} = y_n + h f_n$

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$
$n-3$	0.00	1.0000	0.5000
$n-2$	0.25	1.1250	0.5625
$n-1$	0.50	1.2656	0.6328
n	0.75	1.4238	0.7119
$n+1$	1.00	1.6018	0.8009

- A-B-4 : $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right]$

$= y_n + \frac{0.25}{24}\left[55(0.7119) - 59(0.6328) + 37(0.5625) - 9(0.50)\right]$

$= 1.4238 + 0.18887 = 1.6127$ (predictor)

- A-B-M-4 :

$f_{n+1} = \frac{1}{2} y_{n+1} = \frac{1}{2} \times 1.6127 = 0.8063$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right]$

$= 1.4238 + \frac{0.25}{24}\left[9(0.8063) + 19(0.7119) - 5(0.6328) + 0.5625\right]$

$= 1.4238 + 0.1894 = 1.6132$ (predictor - corrector)

- A-M-4 :

Iterasi 2 : $f_{n+1} = \frac{1}{2} \times 1.6132 = 0.8066$

$y_{n+1} = 1.4238 + \frac{0.25}{24}\left[9(0.8066) + 19(0.7119) - 5(0.6328) + 0.5625\right]$

$= 1.613216$

Iterasi 3 : $f_{n+1} = 0.8066$

$y_{n+1} = 1.613217.$

$\vdots$

Iterasi 9 : $f_{n+1} = 0.80661$

$y_{n+1} = 1.613217.$

Tampak bahwa algoritma 'predictor - corrector' sudah mencukupi dibanding dgn iterasi

Tabel hasil

x	$e^{x/2}$	Euler	A-B-4	A-B-M-4
0.00	1.0000	1.0000	-	-
0.25	1.13315	1.1250	-	-
0.50	1.28403	1.2656	-	-
0.75	1.45499	1.4238	-	-
1.00	1.64872	1.6018	1.6127	1.6132
		−2.846%	−2.185%	−2.154%

Untuk latihan : hitung $y(1) = ?$ dgn $h = 0.125$, bandingkan dgn hasil $h = 0.25$.