VI. MATRIK

VI.1. Notasi & Konsep - konsep pendahuluan.

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad m \times n$$

$$B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad n \times p$$

$$C = (c_{ij}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{bmatrix} \quad n \times p$$

$$D = (d_{ij}) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1q} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pq} \end{bmatrix} \quad p \times q$$

maka

- $E = B + C$ adalah matrik $n \times p$ dengan $e_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$

  $B + C = C + B$

- $F = AB$ adalah matrik $m \times p$ dengan $f_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

  $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)D = BD + CD$

  $AB \overset{?}{\neq} BA$, jika $AB = BA$ maka A & B disebut 'commute'

Contoh :

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

maka

$$B + C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad (B+C)A = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 \\ 5 & 6 & 5 \\ 23 & 32 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 37 \end{bmatrix}$$

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

maka

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 11 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 14 & 14 & 7 \end{bmatrix} \qquad AB = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 11 \\ 1 & 1 & 4 \\ 11 & 7 & 18 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 16 & 9 & 7 \\ 7 & -7 & 0 \\ 13 & 11 & 6 \end{bmatrix} \qquad B^2 = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 14 \\ -3 & 0 & -3 \\ 9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)(A+B) = \begin{bmatrix} -19 & -6 & -10 \\ -5 & 13 & 7 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -14 \\ 1 & 5 & 3 \\ 5 & 8 & -8 \end{bmatrix}$$

tampak bahwa $(A-B)(A+B) \neq A^2 - B^2$

ternyata $(A-B)(A+B) = A^2 - BA + AB - B^2$

- A^t = A transpos $\rightarrow G = A^t$, $g_{ij} = a_{ji}$

  $(B+C)^t = B^t + C^t$, $(ABD)^t = D^t B^t A^t$

  Jika $A = A^t$ maka A adalah simetris

  Contoh: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

- H adalah matrik diagonal jhj H adalah $n \times n$ dan $h_{ij} = 0$ utk $i \neq j$.

  Jika h_{ii} ditulis sebagai h_i, matrik diagonal H sering ditulis $[h_1, h_2, \dots, h_n]$

  Perhatikan: AH adalah matrik $m \times n \rightarrow (h_j a_{ij})$
  HB adalah matrik $n \times p \rightarrow (h_i b_{ij})$

  H adalah matrik skalar jhj elemennya h_{ii} mempunyai nilai sama yaitu h.

  $$hA = Ah = AH \qquad hB = Bh = HB$$

  Jika $h = 1$, maka H disebut matrik identitas dan biasanya ditulis sebagai I.

  $$IA = AI = A$$

  Contoh: $H = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{nn} \end{bmatrix}$ $\quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

- Jika $AK = I$, maka K adalah unik dan disebut invers dari A yg biasa ditulis sbg A^{-1}.
  Matrik A disebut non-singuler jhj A^{-1} ada.

- Determinan.
  Jika terdapat suatu matrik, A, $n \times n$, maka dapat dihitung determinan A yang diberi notasi $\det(A)$, $\det A$, atau $|A|$.

Beberapa sifat determinan:

$$\det(A^t) = \det(A), \quad \det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Untuk menghitung determinan dibutuhkan beberapa definisi:

a) Minor dari a_{ij} adalah determinan dari suatu $(n-1)\times(n-1)$ matrik yang dibentuk dari matrik A, $n \times n$, dimana baris dan kolom yg berisi a_{ij} dibuang.

b) Kofaktor dari a_{ij} adalah suatu bilangan hasil perkalian antara $(-1)^{i+j}$ dikalikan dgn minor dari a_{ij}, dan diberi notasi A_{ij}.

Determinan A dapat dihitung sbg:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{rj} A_{rj} = \sum_{i=1}^{n} a_{is} A_{is}$$

Contoh:

$$\det\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix} = \overset{a_{11}}{1} \times \overset{\text{kofaktor } a_{11}}{5} + \underset{a_{12}}{4}\,\underset{\text{kofaktor } a_{12}}{(-2)} = -3$$

atau

$$= \underset{a_{22}}{5} \times \underset{\text{kofaktor } a_{22}}{1} + 2(-4) = -3$$

$$\det\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \underbrace{5\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}_{\text{kofator } a_{11}} + \underbrace{3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}_{\text{kofaktor } a_{12}} + (-1)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 5\times 1\times(-4+6) + 3\times(-1)\times(4-4) - 1\times(+1)\times(-3+2)$$

$$= 11$$

- Vektor adalah matrik dgn kolom tunggal

Contoh :

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \qquad v = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}$$

'inner product' (dot product) : $(u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u^t v = v^t u$

Beberapa sifat : $(u, v+w) = (u, v) + (u, w)$

$(u+v, w) = (u, w) + (v, w)$

$(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$ $\quad \alpha$ skalar

$(u, u) \geq 0$, $(u, u) = 0$ jhj $\{u\} = 0$

VI.2. Determinan dan inverse

Secara numeris determinan dan inverse dapat diselesaikan dengan metoda Gauss beserta variannya yg sudah dijelaskan pada bab V.

Jika matrik A adalah $n\times n$, maka pernyataan - pernyataan di bawah ini adalah equivalen :

1. $[A]\{x\} = \{B\}$ mempunyai penyelesaian yg unik
2. $[A]\{x\} = 0$ berarti $\{x\} = 0$
3. $[A]^{-1}$ ada
4. $\det(A) \neq 0$

- Menghitung determinan dgn eliminasi segitiga atas.

Dengan metoda kofaktor dihitung determinan suatu matrix A, n×n, dgn ekspansi thd kolom pertama.

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \qquad + a_{n1}A_{n1}$$

Jika A adalah matrik segitiga atas, maka $a_{i1} = 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$

$$\therefore \det A = a_{11} A_{11} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Jika A matrik tidak segitiga, maka

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = K \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{vmatrix}$$

Contoh :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ -6 & 1 & 9 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -3B_1 + B_2 \\ -B_1 + B_3 \\ 6B_1 + B_4 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -17 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 25 & 21 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ B_2/(-17) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -17 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4/17 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 25 & 21 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 4B_2 + B_3 \\ -25B_2 + B_4 \end{matrix}$$

$$|A| = -17 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4/17 \\ 0 & 0 & 2 & 86/17 \\ 0 & 0 & 21 & 117/17 \end{vmatrix} \quad \tfrac{1}{2} B_3$$

$$= (2)(-17) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4/17 \\ 0 & 0 & 1 & 43/17 \\ 0 & 0 & 21 & 117/17 \end{vmatrix} \quad -21 B_3 + B_4$$

$$= -34 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4/17 \\ 0 & 0 & 1 & 43/17 \\ 0 & 0 & 0 & -786/17 \end{vmatrix} = (-34)(1)(1)(1)(-786/17) = 1572$$

VI.3. Matrik dan vektor eigen

Pada setiap matrik A, nxn, terdapat satu set vektor yang disebut vektor eigen dan satu set skalar yang disebut nilai eigen.

Vektor u disebut vektor eigen dari matrik A jhj u vektor tidak nol dan λ adalah suatu skalar (yang mungkin nol nilainya), sehingga

$$[A]\{u\} = \lambda\{u\} \qquad (I)$$

Skalar λ disebut nilai eigen dari matrik A

Pers.(I) dapat ditulis sebagai :

$$[A-\lambda I]\{u\} = \{0\} \qquad (II)$$

Pers. (II) mempunyai penyelesaian dgn $\{u\}$ tidak nol, jika

$$\phi(\lambda) \equiv \det(A-\lambda I) = 0$$

$\phi(\lambda)$ disebut fungsi karakteristik dari matrik A.

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

Contoh :

Menentukan vektor & nilai eigen matrik $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\phi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left\{(3-\lambda)(2-\lambda)-1\right\} - \left\{2-\lambda+0\right\} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8$$

Akar dari $\phi(\lambda) = 0$ adalah nilai eigen $\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 2$
$\lambda_3 = 4$

Vektor eigen utk $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -1 & 0 \\ -1 & 3-1 & -1 \\ 0 & -1 & 2-1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] B_1 + B_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} B_2 + B_1 \\ \\ B_2 + B_3 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ini berarti terdapat 2 persamaan linier untuk 3 bilangan tak diketahui

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - u_3 = 0 \\ u_2 - u_3 = 0 \end{array}\right\} u_1 = u_2 = u_3$$

Jadi vektor eigen utk $\lambda_1 = 1$ adalah $\{u\}_1 = u_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Vektor eigen untuk $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

tampak bahwa baris 1 & 3 identik, shg hanya terdapat 2 persamaan.

$$\left.\begin{array}{l} -u_2 = 0 \\ -u_1 + u_2 - u_3 = 0 \end{array}\right\} u_1 = -u_3 \,,\ u_2 = 0$$

$$\{u\}_2 = u_3 \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Vektor eigen untuk $\lambda_3 = 4$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \xrightarrow[\text{Jordan}]{\text{Gauss}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{u\} = \{0\}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - u_3 = 0 \\ u_2 + 2u_3 = 0 \end{array}\right\} u_1 = u_3 \,,\quad u_2 = -2u_3$$

$$\{u\}_3 = u_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- Metoda 'power' utk mendapatkan nilai & vektor eigen terbesar

Langkah-langkah :

1. Rumuskan fenomena fisik kebentuk $[A]\{u\} = \lambda\{u\}$
2. Prakirakan vektor awal $\{u\}_0 \neq \{0\}$
3. Hitung vektor baru $\{u\}_1 = [A]\{u\}_0$
4. Faktorkan koefisien terbesar $\{u\}_{1'} = \lambda_1\{u\}_1$
5. Kembali ke langkah 3 dgn $\{u_0\} = \{u\}_1'$ sampai $\{u\}_1 \approx \{u\}_0$

Contoh : Tentukan nilai & vektor eigen dari matrik

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 5 \\ 6 & 30 & 9 \\ 5 & 9 & 30 \end{bmatrix}$$

Vektor awal : $\{u\}_0^t = \{0, 0, 1\}$

$$[A]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 9 \\ 30 \end{Bmatrix}_1 = 30\begin{Bmatrix} 0.166 \\ 0.300 \\ 1.000 \end{Bmatrix}_1$$

$$[A]\begin{Bmatrix} 0.166 \\ 0.300 \\ 1.000 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 11.780 \\ 18.996 \\ 33.530 \end{Bmatrix}_2 = 33.530\begin{Bmatrix} 0.351 \\ 0.566 \\ 1.000 \end{Bmatrix}_2$$

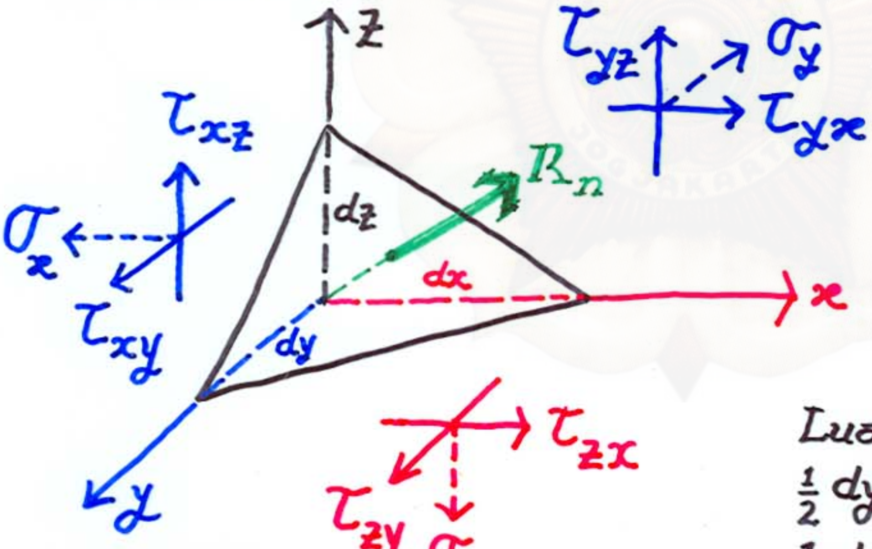
$$[A]\begin{Bmatrix} 0.351 \\ 0.566 \\ 1.000 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 18.926 \\ 29.886 \\ 36.849 \end{Bmatrix}_3 = 36.849\begin{Bmatrix} 0.514 \\ 0.811 \\ 1.000 \end{Bmatrix}$$

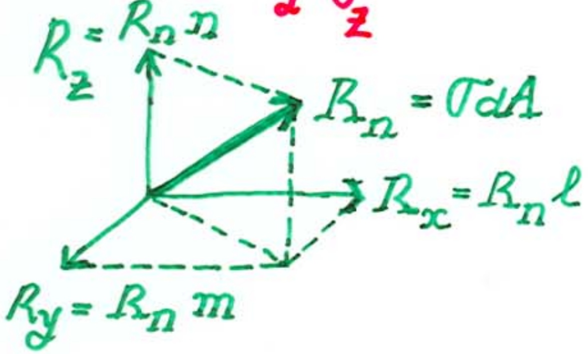
$$[A]\begin{Bmatrix}0.514\\0.811\\1.000\end{Bmatrix}_3=\begin{Bmatrix}25.286\\36.414\\39.869\end{Bmatrix}_4=39.869\begin{Bmatrix}0.634\\0.913\\1.000\end{Bmatrix}$$

dst ... akhirnya didapat

$$\lambda_1 = 43.49 \text{ dan } \{u\}_1=\begin{Bmatrix}0.800\\1.000\\0.965\end{Bmatrix}$$

Contoh aplikasi : Suatu elemen berbentuk piramida dalam suatu benda yg dikenai gaya² luar. Gaya normal dan geser yg sejajar sumbu-sumbu koordinat telah diketahui, maka diinginkan bidang patahan yang mungkin terjadi dan besarnya gaya normal yg bekerja pada bidang itu





Luas bidang miring = dA

$\frac{1}{2}\,dy\,dz = dA\cos(N,x) = l\,dA$

$\frac{1}{2}\,dx\,dz = dA\cos(N,y) = m\,dA$

$\frac{1}{2}\,dx\,dy = dA\cos(N,z) = n\,dA$

dimana N arah normal ($\perp$) bidang miring

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow \tfrac{1}{2}dy\,dz\,\sigma_x + \tfrac{1}{2}dx\,dz\,\tau_{yx} + \tfrac{1}{2}dx\,dy\,\tau_{zx} + R_x = 0$$

$$l\,dA\,\sigma_x + m\,dA\,\tau_{yx} + n\,dA\,\tau_{zx} + l\,dA\,\sigma = 0$$

$$l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} = -\sigma l$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow \tfrac{1}{2}dy\,dz\,\tau_{xy} + \tfrac{1}{2}dx\,dz\,\sigma_y + \tfrac{1}{2}dx\,dy\,\tau_{zy} + R_y = 0$$

$$l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} = -\sigma m$$

$$\Sigma F_z = 0 \rightarrow \tfrac{1}{2}dy\,dz\,\tau_{xz} + \tfrac{1}{2}dx\,dz\,\tau_{yz} + \tfrac{1}{2}dx\,dy\,\sigma_z + R_z = 0$$

$$l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z = -\sigma n$$

Sekarang dalam bentuk matrik :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} = -\sigma \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

atau $[A]\{u\} = \lambda\{u\}$ ← problem nilai & vektor eigen

dimana

$[A]$ matrik yg elemennya terdiri dari gaya geser & normal // sumbu koordinat ← diketahui

$\{u\}$ vektor yg elemennya t.a. cosinus sudut bidang patahan dgn sumbu koordinat ← dicari

λ skalar yg merupakan/menyatakan gaya normal/tegangan normal yg bekerja pd bidang patahan ← dicari.