V. SISTEM PERSAMAAN LINIER

V.1. Eliminasi Gauss.

Eliminasi Gauss digunakan mencari akar sistem persamaan linier.

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Contoh :

Ditinjau sistem persamaan :

$$\begin{aligned} 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 9 \\ x_1 + 9x_2 - 6x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned}$$

yang akarnya adalah $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, dan $x_3 = 2$.

Pers. diatas dalam bentuk matrik dapat ditulis sbg :

$$[B]\{x\} = \{u\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 9 & -6 \\ -3 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

Untuk menjelaskan eliminasi Gauss, maka dibentuk suatu matrik sbb :

$$[B \mid u \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & -7 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Kita kalikan baris 1 dgn $\frac{1}{2}$, tambahkan (−1 × baris 1 yg baru) kepada baris 2, dan tambahkan (3 × baris 1 yang baru) kepada baris 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 & (1/2) & 0 & 0 \\ 0 & 25/2 & -8 & -7/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -5/2 & 11 & 39/2 & 3/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Operasi di atas sama dengan pembentukan/pengubahan sistem persamaan asli menjadi

$$\begin{aligned} x_1 - 7/2\, x_2 + 2\, x_3 &= 9/2 \\ 25/2\, x_2 - 8\, x_3 &= -7/2 \\ -5/2\, x_2 + 11\, x_3 &= 39/2 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa operasi di atas jika ditulis dalam bentuk matrik adalah

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dilakukan operasi sbb : kalikan baris 2 dengan 2/25 dan tambahkan (5/2 × baris 2 yg baru) kepada baris 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -16/25 & -7/25 & -1/25 & (2/25) & 0 \\ 0 & 0 & 47/5 & 94/5 & 7/5 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi kalau di 'resume'

$$\left[B \;\vdots\; u \;\vdots\; I \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & -7 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 93/235 & 67/235 & 6/235 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 13/235 & 22/235 & 16/235 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7/47 & 1/47 & 5/47 \end{array}\right]$$

$$\left[I \quad x \quad B^{-1} \right]$$

V.2. Eliminasi Gauss-Jordan

Pada eliminasi Gauss di atas secara garis besar terdiri dari beberapa langkah :

a. operasi normalisasi : elemen diagonal diubah menjadi bernilai 1

b. operasi reduksi : elemen non-diagonal diubah menjadi bernilai 0

Pada eliminasi Gauss-Jordan operasi a & b dikerjakan bersamaan.

Contoh :

$$\begin{aligned} 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 9 \\ x_1 + 9x_2 - 6x_3 &= 1 \\ -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$[B \,\vdots\, u \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & -7 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Normalisasi baris 1 dgn membaginya dgn elemen 'pivot' = 2.
kemudian : a. baris 2 − baris 1 yg baru
b. baris 3 + 3× baris 1 yg baru

$$\begin{bmatrix} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 25/2 & -8 & -7/2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -5/2 & 11 & 39/2 & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Normalisasi baris 2 dgn membaginya dgn elemen 'pivot' = $\frac{25}{2}$.
kemudian : a. kurangi ($-\frac{7}{2}$ × baris 2 yg baru) dari baris 1.
b. kurangi ($-5/2$ × baris 2 yg baru) dari baris 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6/25 & 88/25 & 9/25 & 7/25 & 0 \\ 0 & 1 & -16/25 & -7/25 & -1/25 & 2/25 & 0 \\ 0 & 0 & 47/5 & 94/5 & 7/5 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Normalisasi baris 3 dgn membaginya dgn elemen 'pivot' = $\frac{47}{5}$
kemudian : a. kurangi ($-6/25$ × baris 3 yg baru) dari baris 1
b. kurangi ($-16/25$ × baris 3 yg baru) dari baris 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 93/235 & 67/235 & 6/235 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 13/235 & 22/235 & 16/235 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7/47 & 1/47 & 5/47 \end{array}\right] = [I \,\vdots\, x \,\vdots\, B^{-1}]$$

$$\det B = \left(2 \times \frac{25}{2} \times \frac{47}{5}\right) = 235$$

Operasi terakhir mengubah sistem persamaan menjadi

$$
\begin{aligned}
x_1 - \tfrac{7}{2} x_2 + 2x_3 &= \tfrac{9}{2} \\
x_2 - \tfrac{16}{25} x_3 &= -\tfrac{7}{25} \\
\tfrac{47}{5} x_3 &= \tfrac{94}{5}
\end{aligned}
$$

Kalikan baris 3 dgn $5/47$. Tambahkan ke baris 2 : ($16/25$ × baris 3 yg baru). Tambahkan ke baris 1 : (-2 × baris 3 yang baru)

$$
\begin{bmatrix}
1 & -7/2 & 0 & 1/2 & 19/24 & -2/47 & -10/47 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 13/235 & 22/235 & 16/235 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 7/47 & 1/47 & (5/47)
\end{bmatrix}
$$

Akhirnya tambahkan ke baris 1 : ($7/2$ × baris 2)

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 4 & 93/235 & 67/235 & 6/235 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 13/235 & 22/235 & 16/235 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 7/47 & 1/47 & 5/47
\end{bmatrix}
$$

Jadi sistem persamaan menjadi $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. dan inverse matrik [B] adalah

$$
\begin{bmatrix}
93/235 & 67/235 & 6/235 \\
13/235 & 22/235 & 16/235 \\
7/47 & 1/47 & 5/47
\end{bmatrix}
$$

Dari pengamatan : $\det B = \left[\frac{1}{2} \times \frac{2}{25} \times \frac{5}{47} \right]^{-1} = 235$

- Eliminasi Gauss-Jordan dgn 'pivot' maksimum

Jika matrik [B] mempunyai salah satu elemen yg mempunyai nilai kecil sekali dibandingkan elemen yg lain, maka cara 'pivoting' yang sebelumnya dapat memberikan hasil yang tidak akurat. Oleh karena itu dipilih elemen 'pivot' yang mempunyai nilai terbesar.

Contoh :

$$\begin{aligned} -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 9 \\ x_1 + 9x_2 - 6x &= 1 \end{aligned}$$

$$[B \,\vdots\, u \,\vdots\, I] = \left[\begin{array}{ccc:c:ccc} -3 & 8 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 4 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

pivot

Dipilih elemen $b_{32} = 9$ sebagai 'pivot'

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 4 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1/9 & 1 & -2/3 & 1/9 & 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}$$

selanjutnya direduksi sbb :

pivot

$$\begin{bmatrix} -35/9 & 0 & 31/3 & 46/9 & 1 & 0 & -8/9 \\ 25/9 & 0 & -2/3 & 88/9 & 0 & 1 & 7/9 \\ 1/9 & 1 & -2/3 & 1/9 & 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} \quad (I)$$

Operasi 2 :

$$\text{pivot} \begin{bmatrix} -35/93 & 0 & 1 & 46/93 & 3/31 & 0 & -8/9 \\ 235/93 & 0 & 0 & 940/93 & 2/31 & 1 & 67/93 \\ -13/93 & 1 & 0 & 41/93 & 2/31 & 0 & 5/93 \end{bmatrix} \quad (II)$$

Operasi 3 :

$$\left[\begin{array}{ccc:c:ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 5/47 & 7/47 & 1/47 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 6/235 & 93/235 & 67/235 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 16/235 & 13/235 & 22/235 \end{array}\right] \qquad (\text{III})$$

$$\left[\begin{array}{c:c:c} ?_1 & x & ?_2 \end{array}\right]$$

Dari hasil terakhir (III) terlihat bahwa akar persamaan $\{x\}$ dapat diselesaikan, tetapi bagaimana matrik $?_1$ & $?_2$.

Sebetulnya $[?_2]$ elemennya adalah elemen $[B]^{-1}$, hanya letak nya tidak betul sehingga perlu diatur untuk mendapatkan inverse $[B]$ yg sesungguhnya.

Ada butir yang sangat penting dari hasil di atas :

- Akar dari $[B]\{x\} = \{u\}$ dapat dicari tanpa menghitung $[B]^{-1}$
- Hitungan inverse suatu matrik lebih baik dihindari karena mahal biayanya.

Untuk menghemat memori komputer, maka pada cara terakhir (eliminasi G-J dgn 'pivot' maksimum) hasil dari inverse dimasukkan kedalam matrik $[B]$.

yg semula I :

$$\begin{bmatrix} -35/9 & 0 & 31/3 & 46/9 & 1 & 0 & -8/9 \\ 25/9 & 0 & -2/3 & 88/9 & 0 & 1 & 7/9 \\ 1/9 & 1 & -2/3 & 1/9 & 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix}$$

dipindah

Ingat :

'Pivot' : b_{32} (3 = baris, 2 = kolom)

kolom 3 dari $[I]$ → kolom 2 dari $[B]$

I_{i3} pindah b_{i2}

yg baru I :

$$\begin{bmatrix} -35/9 & -8/9 & 31/3 & 46/9 \\ 25/9 & 7/9 & -2/3 & 88/9 \\ 1/9 & 1/9 & -2/3 & 1/9 \end{bmatrix}$$

yg semula II :

$$\begin{bmatrix} -35/93 & 0 & 1 & 46/93 & 3/31 & 0 & -8/9 \\ 235/93 & 0 & 0 & 940/93 & 2/31 & 1 & 67/93 \\ -13/93 & 1 & 0 & 41/93 & 2/31 & 0 & 5/93 \end{bmatrix}$$

yg baru II :

$$\begin{bmatrix} -35/93 & -8/9 & 3/31 & 46/93 \\ 235/93 & 67/93 & 2/31 & 940/93 \\ -13/93 & 5/93 & 2/31 & 41/93 \end{bmatrix}$$

yg semula III :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 5/47 & 7/47 & 1/47 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 6/235 & 93/235 & 67/235 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 16/235 & 13/235 & 22/235 \end{bmatrix}$$

yg baru III :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7/47 & 1/47 & 5/47 & 2 \\ 93/235 & 67/235 & 6/235 & 4 \\ 13/235 & 22/235 & 16/235 & 1 \end{array}\right]$$

"Scrambled inverse"

$\{x\}$ = akar dari sistem persamaan

perlu diatur dahulu utk menghasilkan inverse yg sesungguhnya.

V.3. METODA ITERASI

- **Metoda Gauss-Jacobi**

Kita bahas sistim persamaan : $[B]\{x\} = \{u\}$ atau

$$\begin{array}{l} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \quad + b_{1n}x_n = u_1 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \quad + b_{2n}x_n = u_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \quad + b_{nn}x_n = u_n \end{array} \qquad (A)$$

Metoda Jacobi membentuk persamaan untuk mendekati persamaan di atas :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{u_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - \cdots - b_{1n}x_n}{b_{11}} \\ x_2 &= \frac{u_2 - b_{21}x_1 - b_{23}x_3 - \cdots - b_{2n}x_n}{b_{22}} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{u_n - b_{n1}x_1 - b_{n2}x_2 - \cdots - b_{n,n-1}x_{n-1}}{b_{nn}} \end{aligned} \qquad (B)$$

atau

$$x_i = \frac{u_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} b_{ij}x_j}{b_{ii}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

jika terjadi $b_{ii} = 0$ atau nilainya kecil, maka harus diadakan pengaturan sehingga $b_{ii} \neq 0$.

Metoda ini dimulai dengan 'tebakan' nilai awal $\{x_0\}$, kemudian dimasukkan ke Pers. (B) utk menghitung $\{x\}$ baru.

Contoh : $\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 16 \end{aligned}$ $\rightarrow$ penyelesaian $\{x\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$

persamaan di atas ditulis lagi :

$$x_1 = 11/4 - 1/2\, x_2 - 1/4\, x_3$$

$$x_2 = 3/2 + 1/2\, x_1 \qquad \text{(C)}$$

$$x_3 = 4 - 1/2\, x_1 - \frac{1}{4} x_2$$

Vektor awal $\{x_0\} = [1, 1, 1]^t$

$$x_{11} = 11/4 - 1/2 \times 1 - 1/4 \times 1 = 2$$

$$x_{21} = 3/2 + 1/2 \times 1 = 2$$

$$x_{31} = 4 - 1/2 \times 1 - 1/4 \times 1 = 13/4$$

Jadi $\{x_1\} = [2,\ 2,\ 13/4]^t$ dst

$$\{x_2\} = [0.9375 \quad 2.5 \quad 2.5]^t$$

$$\{x_3\} = [0.875 \quad 1.96875 \quad 2.90625]^t$$

$$\{x_4\} = [1.03906 \quad 1.9375 \quad 3.0703]^t$$

$$\{x_5\} = [1.01367 \quad 2.0195 \quad 2.9961]^t$$

$$\vdots$$

$$\{x_{14}\} = [1.0000 \quad 2.0000 \quad 3.0000]^t$$

Dalam metoda ini elemen vektor yang baru menggunakan elemen vektor yang lama

Metoda Gauss-Seidel

Dibandingkan dengan metoda Jacobi, metoda Gauss-Seidel menghitung elemen vektor baru dengan menggunakan elemen yang baru saja dihitung.

Contoh : digunakan sistim persamaan yang digunakan sebelumnya, jadi Pers. (C) dapat digunakan.

Vektor awal $\{x_0\} = [1, 1, 1]^t$

$$x_{11} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{4} \times 1 = 2$$

$$x_{21} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{5}{2}$$

$$x_{31} = 4 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{19}{8}$$

Jadi $\{x_1\} = \left[2, \frac{5}{2}, \frac{19}{8}\right]^t$

$$\{x_2\} = [0.9063 \quad 1.9531 \quad 3.0586]^t$$

$$\{x_3\} = [1.0088 \quad 2.0044 \quad 2.9945]^t$$

$$\{x_4\} = [0.9992 \quad 1.9996 \quad 3.0005]^t$$

$$\{x_5\} = [1.0000 \quad 2.0000 \quad 3.0000]^t$$