II. PERSAMAAN NON-LINIER
Pencarian akarnya

Didalam matematika aplikasi pencarian akar persamaan

$$f(x) = 0$$

sering dijumpai. Biasanya jawaban analitis dari persamaan diatas tidak ada, sehingga harus dicari jawaban numeriknya yang biasa di-laksanakan dgn metoda iterasi.

II.1. Metoda Bagi Paruh (= Bisection)

- Jika ada suatu $f(x)$ yang menerus $\in [a,b]$ dan

$$f(a)\,f(b) < 0$$

maka menurut Teorema 1.1. paling tidak $f(x)$ mempunyai satu akar $\in [a,b]$.

- Algoritma:

Bisect $(f, a, b, akar, \varepsilon)$

1. Hitung $c := (a+b)/2$
2. Jika $b-c \leq \varepsilon$ maka akar $:= c$, dan 'exit'
3. Jika tanda $(f(b))$. tanda $(f(c)) \leq 0$ maka $a := c$, jika tidak $b := c$
4. Kembali ke langkah nomor 1.

• Definisi

Suatu deret hasil suatu iterasi $\{x_n \mid n \geq 0\}$ dikatakan menuju ke titik α dgn derajad $p \geq 1$, jika

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq c\,|\alpha - x_n|^p \qquad n \geq 0$$

untuk beberapa nilai $c > 0$. Jika $p = 1$, deretnya disebut menuju ketitik α secara linier. Pada kasus ini diperlukan nilai $c < 1$; c disebut sebagai laju linier dari x_n menuju α

Ada beberapa metoda yang membutuhkan definisi yang agak berbeda dgn diatas yaitu

$$|\alpha - x_n| \leq c^n\,|\alpha - x_0| \qquad n \geq 0$$

• Tingkat kelajuan metoda bagi paruh dinyatakan dalam rumus

$$|\alpha - c_n| \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^n (b-a)$$

II.2. Metoda Newton

Deret Taylor :

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) + \tfrac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(x_n) + \ldots$$

atau menurut Teorema 1.4

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) + \tfrac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(\xi)$$

dimana ξ diantara x_n dan x,

Jika akar dari $f(x)$ salah satunya adalah α, maka

$$f(x=\alpha)=0$$

$$f(x_n)+(\alpha-x_n)f'(x_n)+\frac{1}{2}(\alpha-x_n)^2 f''(\xi)=0$$

Jadi $\alpha = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \dfrac{1}{2}(\alpha-x_n)^2\dfrac{f''(\xi)}{f'(x_n)}$

Maka α dapat didekati dengan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n \geqslant 0$$

dimana 'error'nya

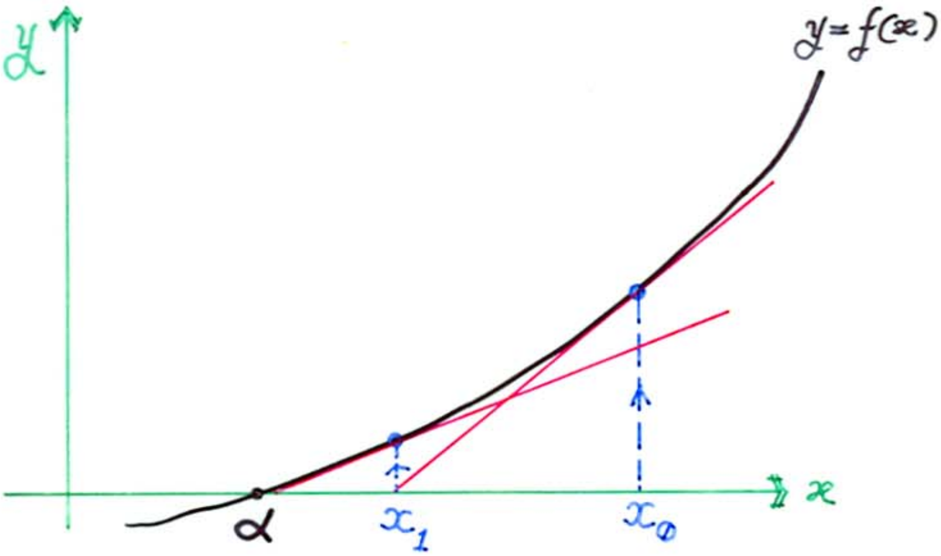
$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(\alpha-x_n)^2 \qquad n \geqslant 0$$

Untuk nilai $n\to\infty$, $\xi\to\alpha$ dan $x_n\to\alpha$ jadi

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(\alpha-x_n)^2$$

$$= \text{konstanta} \times (\alpha-x_n)^2$$

Sehingga metoda Newton dikatakan mempunyai derajad kelajuan = 2.



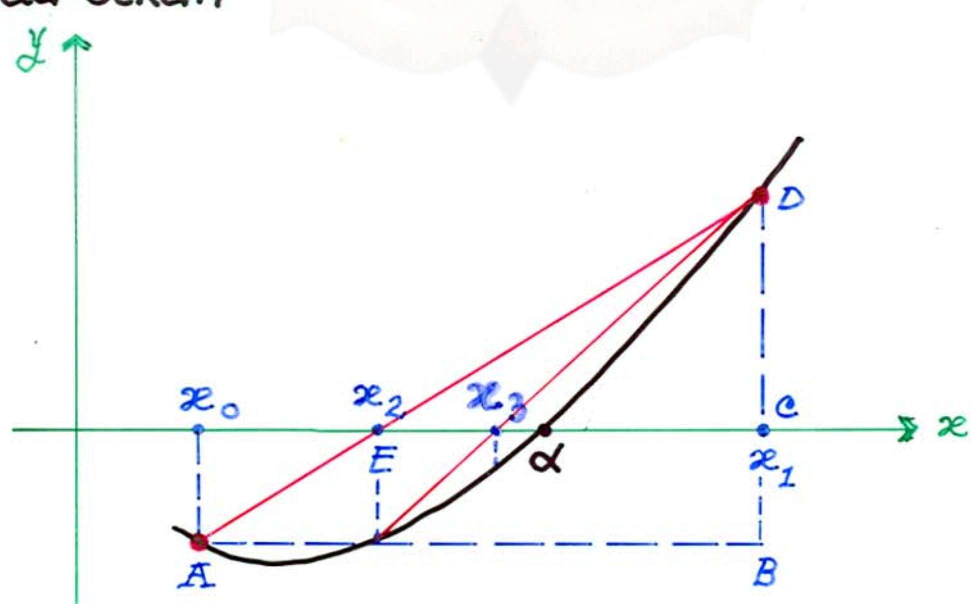
Algoritma

Newton (f, df, x_0, ε, akar, itmax, ierr)

1. Keterangan: df adalah $f'(x)$, itmax adalah maksimum iterasi, ierr adalah 'error flag'
2. noiter := 1
3. penyebut := $df(x_0)$
4. Jika penyebut = 0 maka ierr := 2, dan 'exit'
5. $x_1 := x_0 - f(x_0)/\text{penyebut}$
6. Jika $|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$ maka ierr := 0, akar := x_1, dan 'exit'
7. Jika noiter = itmax maka ierr := 1, dan 'exit'
8. noiter := noiter + 1, $x_0 := x_1$ dan ulangi langkah 3

II.3.

Metoda Sekan



Menggunakan sifat Δ sebangun didapat

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{CE}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2}$$

Jadi

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\,\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\,\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad n \geq 1$$

- Metoda sekan dapat dijabarkan dari metoda Newton dimana

$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

- Derajad konvergensi :
  - untuk metoda Newton $p = 2$
  - untuk metoda sekan $p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = 1.618$
  - untuk metoda 'bisection' $p = 1$

II.4. Akar dari persamaan Polinomial

$$p(x) = a_0 + x\,(a_1 + x\,(a_2 + \cdots + x\,(a_{n-1} + a_n x) \ldots) \qquad (A)$$

atau

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \qquad\qquad + a_n x^n \qquad (B)$$

Pada Pers.(A) terdapat : n perkalian & pertambahan

Pers. (B) terdapat : $2n-1$ perkalian & n pertambahan

Pers. (A) jika ditulis dalam FORTRAN menjadi

```
      p = a(n)
      do 10 i = n,1,-1
10       p = p*x + a(i-1)
```

- Untuk menghitung akar dari persamaan $p(x) = 0$ akan digunakan metoda Newton. Untuk keperluan itu polinomial $p(x)$ akan dimodifikasi sbb:

Disyaratkan :

$$b_n = a_n$$
$$b_k = a_k + z b_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \quad , 0$$

Dari syarat ini $p(x)$ dapat ditulis sebagai

$$p(x) = b_0 + (x - z)\, q(x)$$

dimana

$$q(x) = b_1 + b_2 x + \quad + b_n x^{n-1}$$

sehingga
$$p'(x) = (x-z)\, q'(x) + q(x)$$
$$p'(z) = q(z)$$

- Algoritma :

Polynew (a, n, x_0, ε, itmax, akar, b, ier)

1. Keterangan : a adalah vektor coef. dgn dimensi n, itmax adalah maksimum iterasi, b adalah vektor coef dari polinomial yg baru, ier adalah indikator adanya error

2. noiter := 1

3. $z := x_0$, $b_n := c := a_n$

4. Untuk $k = n-1, \ldots, 1$, $b_k := a_k + z b_{k+1}$, $c := b_k + zc$

5. $b_0 := a_0 + z b_1$

6. Jika $c = 0$, ier := 2, dan 'exit'

7. $x_1 := x_0 - b_0/c$

8. Jika $|x_1 - x_0| \leqslant \varepsilon$, ier := 0, akar := x_1, dan 'exit'

9. Jika noiter = itmax, ier := 1, dan 'exit'

10. noiter := noiter + 1, $x_0 := x_1$, ulangi langkah ke 3