Metoda Elemen Hingga Dalam Hidraulika

# Bab 5
# Konsep Elemen

Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.
mailto:Luknanto@ugm.ac.id

# Pendahuluan

- Domain dibagi menjadi interval yang disebut elemen
- 12 langkah umum akan diberlakukan pada elemen

# 1. Kasus (hal 129)

- Persamaan dasar dan domain

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{dU(x)}{dx}\right)=\frac{2}{x^2} \qquad 1<x<2$$

- Kondisi batas

$$U(1)=2$$

$$\left(-x\frac{dU(x)}{dx}\right)_{x=2}=\frac{1}{2}$$

**KB esensial (constrained)**

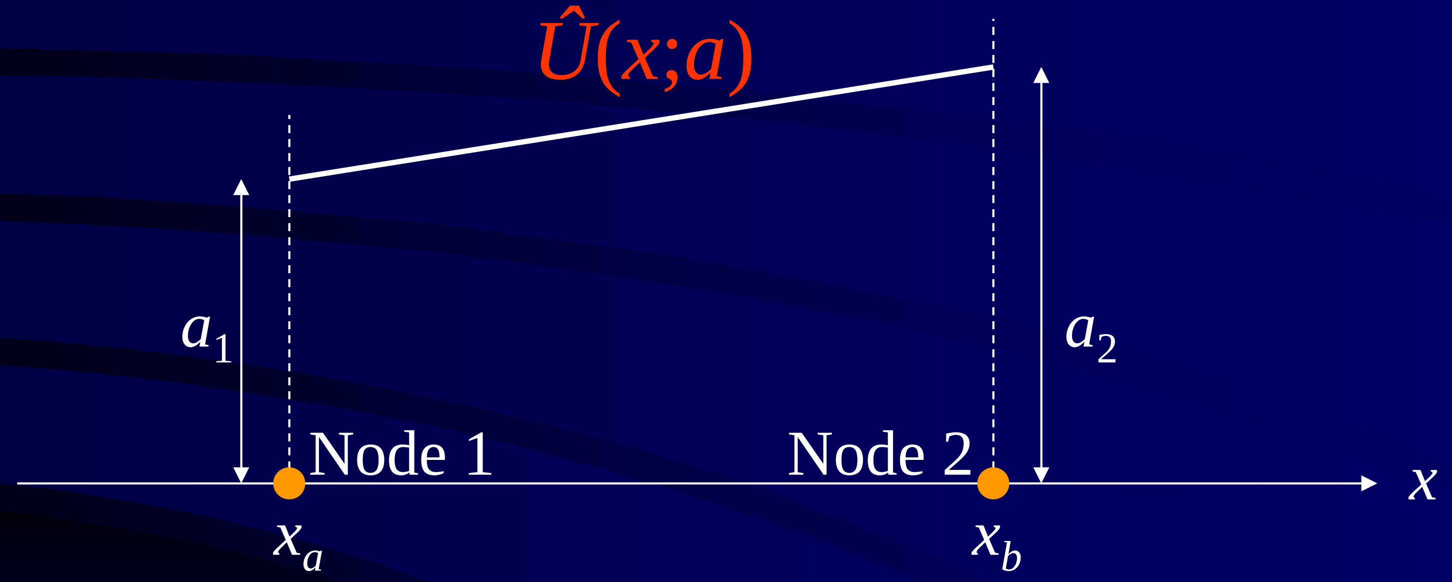
**KB natural (unconstrained)**

# 2. Solusi Satu-Elemen
# Persamaan Elemen (hal 130)

- Langkah 1-3: lakukan seperti bab sebelumnya
  1. Tulis persamaan residual Galerkin
  2. Integration by parts
  3. Substitusi residual kedalam Butir 2
- Langkah 4: Pembentukan $\phi_i(x)$
  1. Dibentuk polinomial: $\hat{U}(x;\alpha) = \alpha_1 + \alpha_2 x$
  2. Polinomial ini harus mempunyai sifat bahwa "Setiap parameter $a_i$ harus merupakan nilai dari "solusi coba" di titik tertentu di dalam elemen."

# *2. persamaan elemen ... 1* (hal 131)

- Gambar polinomial dengan karakteristik tsb.




$$\hat{U}(x_a;a) = a_1 \qquad \hat{U}(x_b;a) = a_2$$

# 2. persamaan elemen ... 2 *(hal 131)*

Dicari persamaan yang memenuhi:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x_a = a_1$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 x_b = a_2$$

diperoleh nilai:

$$\alpha_1 = \frac{x_b a_1 - x_a a_2}{x_b - x_a} \quad \text{dan} \quad \alpha_2 = \frac{a_2 - a_1}{x_b - x_a}$$

# 2. persamaan elemen ... 3 (hal 132)

Diperoleh persamaan:

$$\hat{U}(x;a) = a_1\ \phi_1(x) + a_2\ \phi_2(x)$$

dengan nilai: $\phi_1(x) = \dfrac{x_b - x}{x_b - x_a}$ dan $\phi_2(x) = \dfrac{x - x_a}{x_b - x_a}$

Diperoleh karakteristik “fungsi coba”:

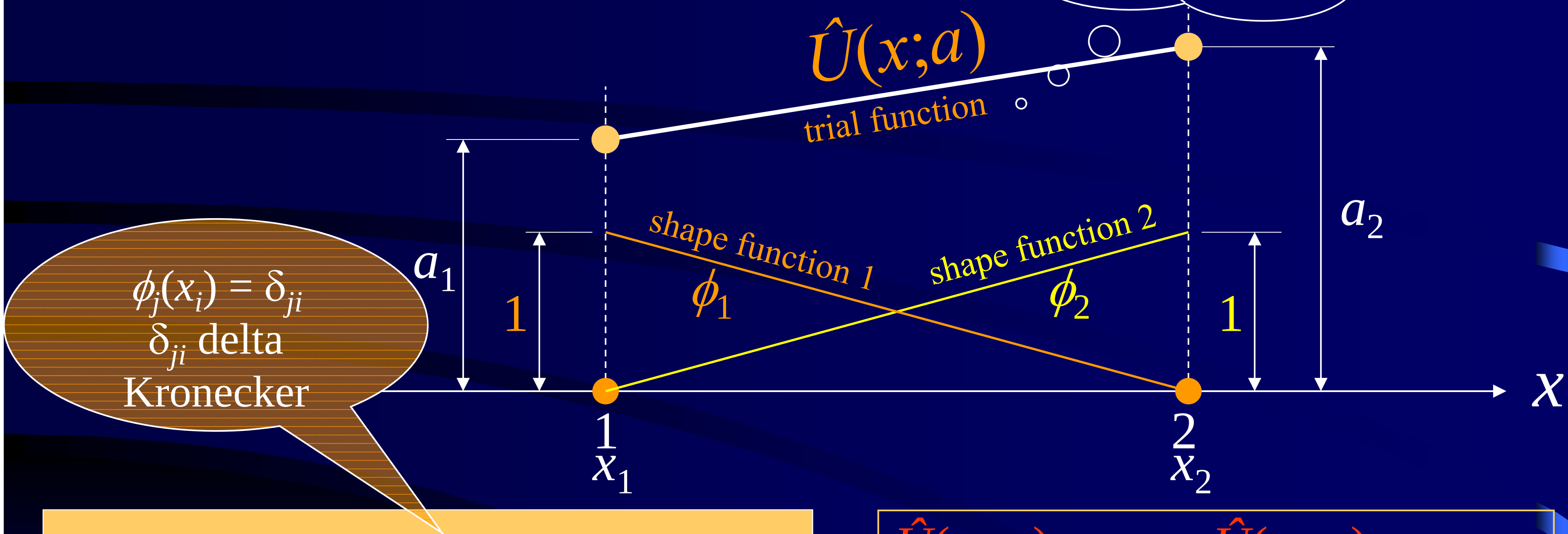
$$\phi_1(x_a) = 1 \qquad \phi_1(x_b) = 0$$

$$\phi_2(x_a) = 0 \qquad \phi_2(x_b) = 1$$

# 2. persamaan elemen ... 4 *(hal 133)*

Gambar $\hat{U}(x;a)$ dan $\phi(x)$

... understand!
... memorize!




$$\phi_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{dan} \quad \phi_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\hat{U}(x;a) = a_1 Ø_1(x) + a_2 Ø_2(x)$$

| | |
|---|---|
| $\hat{U}(x_1;a) = a_1$ | $\hat{U}(x_2;a) = a_2$ |
| $\phi_1(x_1) = 1$ | $\phi_1(x_2) = 0$ |
| $\phi_2(x_1) = 0$ | $\phi_2(x_2) = 1$ |

# 2. Langkah 5: substitusi Solusi (hal 135)

- Sistem persamaan s/d Langkah 4 sbb:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

- $K_{ij}$ dihitung untuk $i$ = 1,2 dan $j$ = 1,2
- $F_i$ dihitung untuk $i$ = 1,2

$$K_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx}\, dx$$

$$\begin{aligned} F_i &= FI_i + FB_i \\ &= -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2}\phi_i\, dx - \left[\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)\phi_i\right]_{x_a}^{x_b} \end{aligned}$$

## 2. Langkah 5: hitung $K_{ij}$ (hal 135)

- $K_{ij}$ dihitung untuk $i$ = 1,2 dan $j$ = 1,2

$$K_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx}\, dx$$

$$\frac{d\phi_1}{dx} = -\frac{1}{x_b - x_a}$$

$$\frac{d\phi_2}{dx} = \frac{1}{x_b - x_a}$$

- diperoleh nilai:

$$K_{11} = \int_{x_a}^{x_b} \left(-\frac{1}{x_b - x_a}\right) x \left(-\frac{1}{x_b - x_a}\right) dx = \frac{1}{2}\frac{x_b + x_a}{x_b - x_a}$$

- $K_{12} = K_{21} = -K_{11}$ dan $K_{22} = K_{11}$

# 2. Langkah 5: hitung $FI_i$ (hal 135)

- $FI_i$ dihitung untuk $i = 1,2$

$$FI_i = -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2}\phi_i \, dx \quad \text{dengan} \quad \phi_1(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_a}, \phi_2(x) = \frac{x - x_a}{x_b - x_a}$$

- diperoleh:

$$FI_1 = -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2}\frac{x_b - x}{x_b - x_a}\, dx = -\frac{2}{x_a} + \frac{2}{x_b - x_a}\ln\frac{x_b + x_a}{x_b - x_a}$$

$$FI_2 = \frac{2}{x_a} - \frac{2}{x_b - x_a}\ln\frac{x_b + x_a}{x_b - x_a}$$

# 2. Langkah 5: hitung $FB_i$ (hal 135)

- $FB_i$ dihitung untuk $i$ = 1,2

$$FB_i = -\left[\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)\phi_i\right]_{x_a}^{x_b} \quad \text{dengan} \quad \phi_1(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_a}, \phi_2(x) = \frac{x - x_a}{x_b - x_a}$$

- diperoleh:

$$FB_1 = -\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_b}\phi_1(x_b) + \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_a}\phi_1(x_a) = \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_a}$$

$$FB_2 = -\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_b}\phi_2(x_b) + \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_a}\phi_2(x_a) = -\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_b}$$

# 2. Langkah 6: hitung *"Flux"* (hal 136)

- *Debit/Flux* dihitung sbb:

$$\hat{\tau}(x) = -x\frac{d\hat{U}}{dx} = -x\left(a_1\frac{d\phi_1(x)}{dx} + a_2\frac{d\phi_2(x)}{dx}\right) = \frac{x}{x_b - x_a}(a_1 - a_2)$$

- Pada akhir Langkah 6 diperoleh sistem persamaan:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{x_b + x_a}{x_b - x_a} & -\frac{1}{2}\frac{x_b + x_a}{x_b - x_a} \\ -\frac{1}{2}\frac{x_b + x_a}{x_b - x_a} & \frac{1}{2}\frac{x_b + x_a}{x_b - x_a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_a} + \frac{2}{x_b - x_a}\ln\frac{x_b}{x_a} \\ -\frac{2}{x_b} - \frac{2}{x_b - x_a}\ln\frac{x_b}{x_a} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_a} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_b} \end{Bmatrix}$$

# 2. Langkah 7 (hal.136)

**Masukkan setiap data lapangan**

- Data geometrik $x_a = 1$, $x_b = 2$
- Sifat-sifat fisik dan “applied load”
  - “interior load”
  - kondisi batas

# 2. Langkah 8 (hal.136)

- Masukkan data kedalam matrik, kecuali data kondisi batas.

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2+2\ln 2 \\ 1-2\ln 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=1} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=2} \end{Bmatrix}$$

- Sistem persamaan di atas siap untuk diselesaikan, kecuali nilai kondisi batas yang belum tuntas!

# 2. Langkah 9 (hal.137)

- Masukkan data kondisi batas kedalam persamaan

$$U(1) = 2 \text{ dan } \left( -x \frac{dU(x)}{dx} \right)_{x=2} = \frac{1}{2}$$

belum dapat dihitung

- aplikasi "debit" kedalam sistem persamaan menjadikan:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + 2\ln 2 \\ 1 - 2\ln 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left( -x \frac{d\hat{U}}{dx} \right)_{x=1} \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

# 2. ...Langkah 9... (hal.137)

- Kondisi batas ***U*(1) = 2**
  - ➢ kondisi batas jenis ini lebih sulit diaplikasikan dibanding kondisi batas “debit.”
  - ➢ dalam sistem persamaan yang terakhir tidak terdapat suku yang dapat menampung nilai kondisi batas di atas.
  - ➢ sehingga digunakan alternatif terakhir yaitu aplikasi kondisi batas di atas langsung kepada “fungsi coba” itu sendiri; dan akan menghasilkan persamaan konstrain

$$\hat{U}(1;a) = a_1 Ø_1(1) + a_2 Ø_2(1) = 2$$

# 2. ...Langkah 9... (hal.137)

- Kondisi batas $\boldsymbol{U}(1) = 2$

$$\hat{U}(1;a) = a_1 \varnothing_1(1) + a_2 \varnothing_2(1) = 2$$

$$\hat{U}(1;a) = a_1 1 + a_2 0 = 2$$

$$a_1 = 2$$

- Tampak bahwa “shape function” sangat menyederhanakan hitungan karena hanya satu parameter saja yang mempunyai nilai = kondisi batas, sehingga menjadi

$$a_i = d$$

# 2. ...Langkah 9... (hal.137)

- Cara menyelesaikan

  $$a_i = d$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

- dalam sistem matriks sbb:
  - ❖ Kalikan kolom ***i*** dengan ***d*** dan kurangilah sebesar hasil kali tersebut dari RHS, kemudian hapus kolom ***i***.
  - ❖ Hapus baris ***i*** dari persamaan tersebut.

# 2. Langkah 9 dan 10 (hal.138)

- Masukkan $a_1$ = 2, kedalam persamaan di bawah

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2+2\ln 2 \\ 1-2\ln 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\dfrac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=1} \\ -\dfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

- Langkah 10, menghasilkan:

$3/2\ a_2 = 1 - 2 \ln 2 - ½ + 3/2\ (a_1)$

$a_2 = 1 - 2 \ln 2 - ½ + 3/2\ (2) = 7/3 - 4/3 \ln 2 = 1.409$

# 2. Langkah 10 & 11 (hal.138)

10. Selesaikan pers. sehingga diperoleh nilai:

$a_1 = 2$ dan $a_2 = 1.409$

Jadi penyelesaian pendekatannya adalah:

$$\hat{U}(x) = 2\ (2 - x) + 1.409\ (x - 1)$$

$$\hat{U}(x) = 2.591 - 0.591\ x$$

11. Hitung debit:

$$\tau(x) = x(a_1 - a_2) = 0.591\ x$$

# 2. Langkah 12 (hal.138)

12. Plot penyelesaiannya dan prakirakan ketelitiannya, lihat Gambar 5.5 (hal 138)

- **$\hat{U}(1) = 2$**

  tepat memenuhi kondisi batas $U(1) = 2$

- **$\tau(2) = 1.182$**

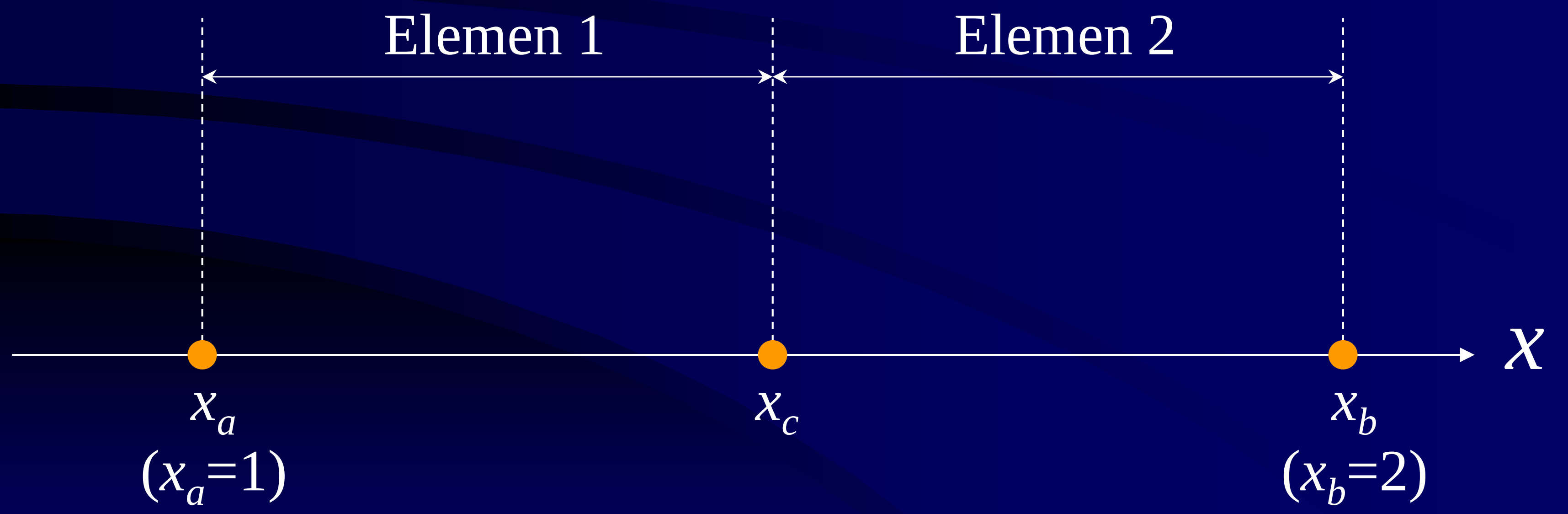
  tidak memenuhi kondisi batas $\tau(2) = 0.5$

Inilah karakteristik yang berbeda antara kedua kondisi batas tersebut, yang pertama dipenuhi secara tepat, yang kedua hanya didekati.

# *3. Persamaan 2 Elemen* (hal 139)

- Domain dibagi menjadi 2 subdomain/elemen

$$x_a < x < x_c \text{ dan } x_c < x < x_b$$



# *3.1. Formulasi 2 Elemen* (hal 140)

- Karena domain dibagi menjadi 2 subdomain/elemen, timbullah pertanyaan mengenai masalah kontinuitas pada "penyelesaian pendekatan" di titik $x_c$.
- Untuk keperluan itu dibutuhkan definisi sbb:

  Suatu fungsi dikatakan termasuk klas $C^n$ (pada domain tertentu) jika fungsi tersebut dan $n$ buah derivatifnya kontinu (pada domain terkait).
- Contoh; Jika sebuah fungsi kontinu $C^0$ dan turunan 1-nya kontinu, maka fungsi tersebut termasuk klas $C^1$; jika turunan 2-nya kontinu, maka fungsi tersebut termasuk klas $C^2$. Suatu fungsi klas $C^n$ pasti termasuk pula klas $C^{n-1}$ , $C^{n-2}$ , …, $C^0$ , tetapi belum tentu masuk klas $C^{n+1}$, $C^{n+2}$, $C^{n+3}$ dst.

## *3.1.a. Formulasi 2 Elemen* (hal 140)

- Diperlukan perumusan kembali persamaan dasar pada tiap elemen

Elemen 1

Elemen 2

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dU^{(1)}(x)}{dx}\right)=\frac{2}{x^2} \qquad x_a < x < x_c$$

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dU^{(2)}(x)}{dx}\right)=\frac{2}{x^2} \qquad x_c < x < x_b$$

- Pada prinsipnya persamaan dasar di atas sama dengan persamaan semula, kecuali pada titik $x_c$.

# 3.1.a. Formulasi 2 Elemen (hal 141)

- Pada prinsipnya yang dibutuhkan adalah pernyataan tentang kontinuitas $U^{(1)}(x)$ dan $U^{(2)}(x)$ pada titik $x_c$.
- Dibuktikan sbb:

$$\int_{x_p-\varepsilon}^{x_p+\varepsilon} \frac{d}{dx}\left(x\frac{dU(x)}{dx}\right)dx = \int_{x_p-\varepsilon}^{x_p+\varepsilon} \frac{2}{x^2}dx$$

$$\left(x\frac{dU(x)}{dx}\right)_{x_p-\varepsilon}^{x_p+\varepsilon} = \left(-\frac{2}{x}\right)_{x_p-\varepsilon}^{x_p+\varepsilon}$$

$$\left(x\frac{dU(x)}{dx}\right)_{x_p+\varepsilon} - \left(x\frac{dU(x)}{dx}\right)_{x_p-\varepsilon} = -\frac{2}{x_p+\varepsilon}+\frac{2}{x_p-\varepsilon}$$

# 3.1.a. Formulasi 2 Elemen (hal 141)

- Jika ε mendekati nol, maka diperoleh

$$\left( x\frac{dU(x)}{dx} \right)_{x_p+\varepsilon} - \left( x\frac{dU(x)}{dx} \right)_{x_p-\varepsilon} = -\frac{2}{x_p+\varepsilon} + \frac{2}{x_p-\varepsilon}$$

$$\left( x\frac{dU(x)}{dx} \right)_{x_p+\varepsilon} - \left( x\frac{dU(x)}{dx} \right)_{x_p-\varepsilon} = -\frac{2}{x_p} + \frac{2}{x_p} = 0$$

$$\left( x\frac{dU(x)}{dx} \right)_{x_p^+} = \left( x\frac{dU(x)}{dx} \right)_{x_p^-}$$

- Jika ***xdU/dx*** kontinu di suatu titik ***$x_p$***, sedangkan itu berlaku untuk seluruh domain, maka ***xdU/dx*** kontinu untuk seluruh domain. Karena ***x*** kontinu dimana saja, maka ***dU/dx*** juga kontinu.

## *3.1.a. Formulasi 2 Elemen* (hal 141)

- Integrasi ***dU/dx*** akan menunjukkan pula bahwa ***U*** kontinu di sembarang titik $x_p$:

$$U(x_p^+) = U(x_p^-)$$

- Untuk suatu titik $x_c$, dapat ditulis $U^{(1)}$ untuk setiap titik di sebelah kirinya dan $U^{(2)}$ untuk setiap titik di sebelah kanannya.

## 3.1.a. Kondisi Batas Internal (hal 141)

- Sehingga untuk suatu titik $x_c$, dapat ditulis kondisi kontinuitas sbb:

$$\left(-x\frac{dU^{(1)}}{dx}\right)_{x_c} = \left(-x\frac{dU^{(2)}}{dx}\right)_{x_c}$$

$$U^{(1)}(x_c) = U^{(2)}(x_c)$$

- Persamaan di atas terkenal dengan nama "**KBI**" kondisi batas internal. **KBI** harus dipenuhi oleh "exact solution" pada batas antara dua elemen.
- Sedangkan KB harus dipenuhi pada batas dari domain.

# *3.1.b. Kondisi Batas Lengkap* (hal 142)

Kondisi Batas Internal

$$\left(-x\frac{dU^{(1)}}{dx}\right)_{x_c} = \left(-x\frac{dU^{(2)}}{dx}\right)_{x_c}$$

$$U^{(1)}(x_c) = U^{(2)}(x_c)$$

Kondisi Batas

$$U^{(1)}(1) = 2$$

Kondisi Batas

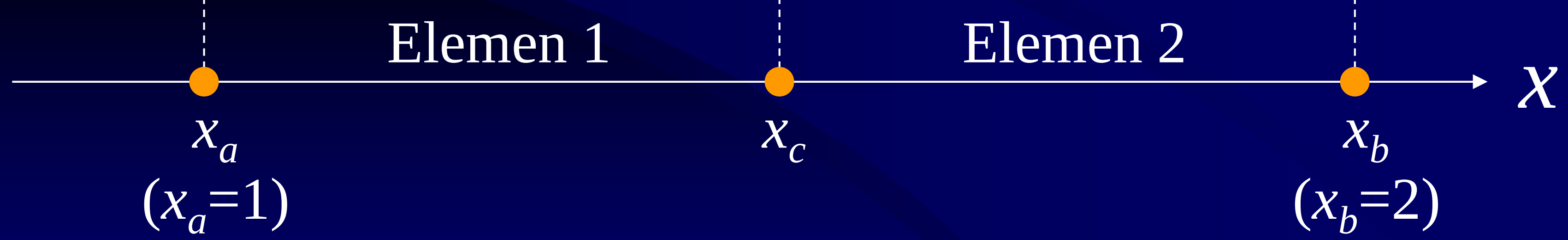
$$\left(-x\frac{dU^{(2)}}{dx}\right)_{x=2} = \frac{1}{2}$$

Pers. Dasar

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dU^{(1)}(x)}{dx}\right) = \frac{2}{x^2}$$

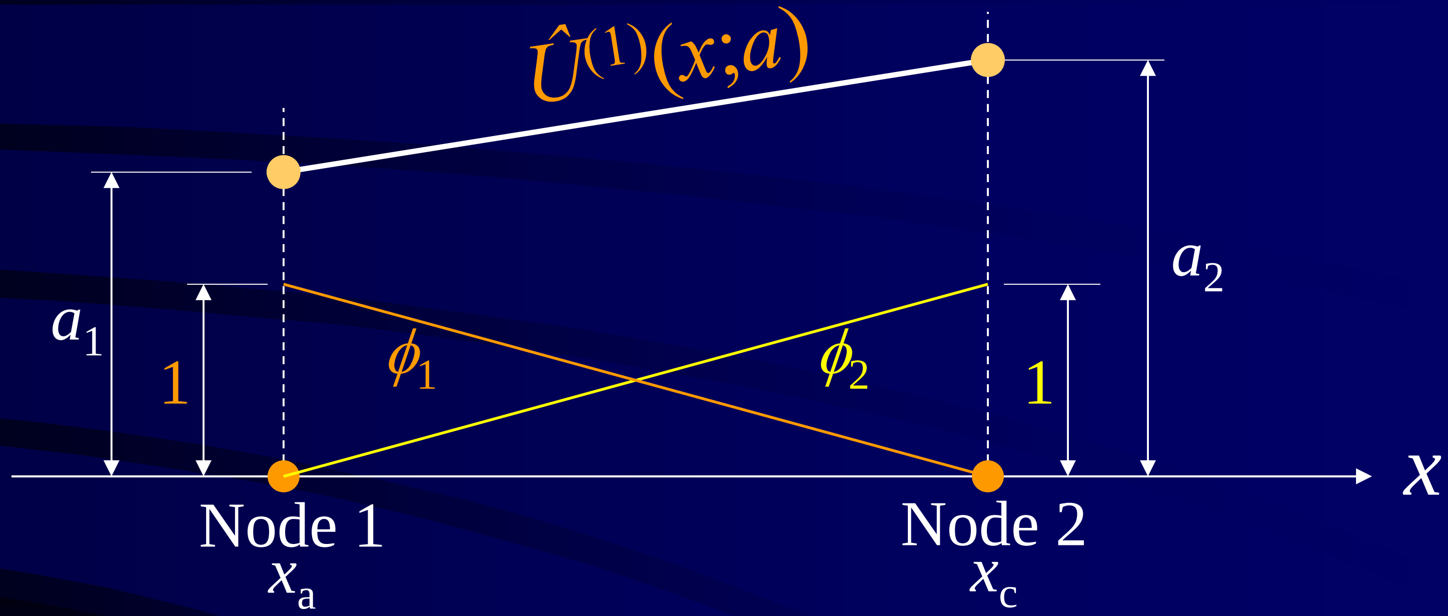
Pers. Dasar

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dU^{(2)}(x)}{dx}\right) = \frac{2}{x^2}$$



# *3.2.a. Elemen 1* (hal 143)

Gambar $\hat{U}^{(1)}(x;a)$ dan $\phi(x)$




$$\phi_1(x) = \frac{x_c - x}{x_c - x_a} \quad \text{dan} \quad \phi_2(x) = \frac{x - x_a}{x_c - x_a}$$

$$\hat{U}^{(1)}(x;a) = a_1 Ø_1(x) + a_2 Ø_2(x)$$

# *3.2.b. Elemen 1: Langkah 1-6* (hal 144)

- Langkah 1-6 menghasilkan matriks:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{x_c+x_a}{x_c-x_a} & -\frac{1}{2}\frac{x_c+x_a}{x_c-x_a} \\ -\frac{1}{2}\frac{x_c+x_a}{x_c-x_a} & \frac{1}{2}\frac{x_c+x_a}{x_c-x_a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_a}+\frac{2}{x_c-x_a}\ln\frac{x_c}{x_a} \\ -\frac{2}{x_c}-\frac{2}{x_c-x_a}\ln\frac{x_c}{x_a} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x_a} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x_c} \end{Bmatrix}$$

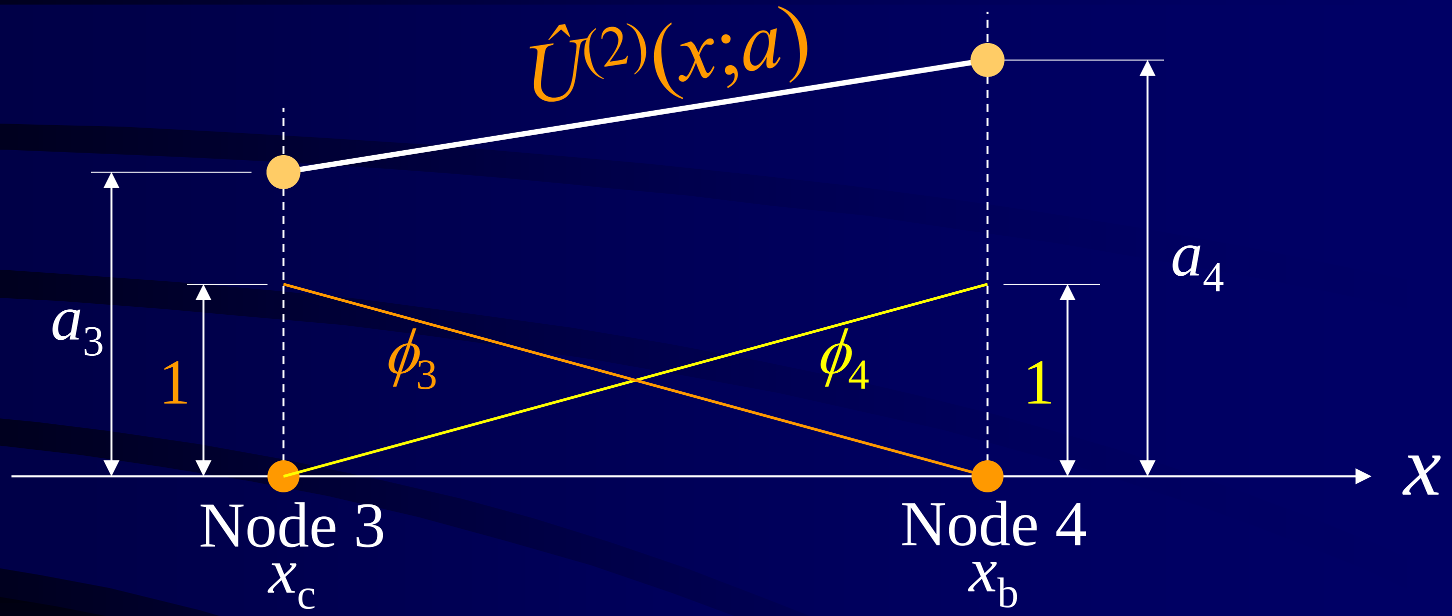
$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

- *Debit/Flux* dihitung sbb:

$$\hat{\tau}^{(1)}(x) = -x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx} = -x\left(a_1\frac{d\phi_1(x)}{dx}+a_2\frac{d\phi_2(x)}{dx}\right) = \frac{x}{x_c-x_a}(a_1-a_2)$$

# *3.2.c. Elemen 2* (hal 145)

Gambar $\hat{U}^{(2)}(x;a)$ dan $\phi(x)$




$$\phi_3(x) = \frac{x_b - x}{x_b - x_c} \quad \text{dan} \quad \phi_4(x) = \frac{x - x_c}{x_b - x_c}$$

$$\hat{U}^{(2)}(x;a) = a_3 Ø_3(x) + a_4 Ø_4(x)$$

# 3.2.d. Elemen 2: Langkah 1-6 (hal 145)

- Langkah 1-6 menghasilkan matriks:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{x_b+x_c}{x_b-x_c} & -\frac{1}{2}\frac{x_b+x_c}{x_b-x_c} \\ -\frac{1}{2}\frac{x_b+x_c}{x_b-x_c} & \frac{1}{2}\frac{x_b+x_c}{x_b-x_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_c}+\frac{2}{x_b-x_c}\ln\frac{x_b}{x_c} \\ -\frac{2}{x_b}-\frac{2}{x_b-x_c}\ln\frac{x_b}{x_c} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x_c} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x_b} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{Bmatrix}$$

- *Debit/Flux* dihitung sbb:

$$\hat{\tau}^{(2)}(x) = -x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx} = -x\left(a_3\frac{d\phi_3(x)}{dx}+a_4\frac{d\phi_4(x)}{dx}\right) = \frac{x}{x_b-x_c}(a_3-a_4)$$

## 3.2.e. Elemen 1 dan 2 : Langkah 1-6 (hal 146)

- Elemen 1&2 digabung menghasilkan matriks:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{x_c+x_a}{x_c-x_a} & -\frac{1}{2}\frac{x_c+x_a}{x_c-x_a} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{x_c+x_a}{x_c-x_a} & \frac{1}{2}\frac{x_c+x_a}{x_c-x_a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{x_b+x_c}{x_b-x_c} & -\frac{1}{2}\frac{x_b+x_c}{x_b-x_c} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\frac{x_b+x_c}{x_b-x_c} & \frac{1}{2}\frac{x_b+x_c}{x_b-x_c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_a}+\frac{2}{x_c-x_a}\ln\frac{x_c}{x_a} \\ \frac{2}{x_c}-\frac{2}{x_c-x_a}\ln\frac{x_c}{x_a} \\ -\frac{2}{x_c}+\frac{2}{x_b-x_c}\ln\frac{x_b}{x_c} \\ \frac{2}{x_b}-\frac{2}{x_b-x_c}\ln\frac{x_b}{x_c} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x_a} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x_c} \\ \left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x_c} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x_b} \end{Bmatrix}$$

## *3.2.f. Elemen 1 dan 2* (hal 147)

- Secara simbolik dalam bentuk matrik menjadi:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \\ F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{Bmatrix}$$

- Perhatikan bahwa anggota matrik dari elemen 1 tidak ditambahkan pada elemen 2. Jadi kedua elemen tersebut masih terpisah

# 3.3. Langkah 7 (hal. 147)

- **Masukkan setiap data lapangan**
  - Data geometrik $x_a = 1$, $x_b = 2$
  - Digunakan $x_c = 3/2$, karena tidak indikasi pemilihan nilai yang lain.
  - Sifat-sifat fisik dan “applied load”
    - “interior load”
    - kondisi batas
- **Catatan: Proses menentukan panjang elemen dan lokasi titik biasa disebut dengan “mesh generation.”**

## 3.3. Langkah 8 (hal 148)

- Masukkan data lapangan ke sistem persamaan

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} -2 + 4\ln\frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\ln\frac{3}{2} \\ -\frac{4}{3} + 4\ln\frac{4}{3} \\ 1 - 4\ln\frac{4}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}} \\ \left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=2} \end{Bmatrix}$$

# *3.3.a.* Langkah 8… (hal 148)

- Pada titik $x_c$, dapat ditulis kondisi kontinuitas sbb:

$$\left(-x\frac{dU^{(1)}}{dx}\right)_{x_c} = \left(-x\frac{dU^{(2)}}{dx}\right)_{x_c}$$

$$U^{(1)}(x_c) = U^{(2)}(x_c)$$

- Pada $x_c = 3/2$, maka $U^{(1)}(3/2) = U^{(2)}(3/2)$, untuk "solusi coba" hal sama berlaku, maka:

$$\hat{U}^{(1)}(3/2) = \hat{U}^{(2)}(3/2)$$

- maka $a_2 = a_3$

# *3.3.b.* Langkah 8... (hal 149)

- Syarat $a_2 = a_3$ , dapat dipandang sebagai "persamaan konstrain", dalam matriks dilakukan dengan menambah Kolom 2+3 dan Baris 2+3 sbb:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{2}+\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2+4\ln\frac{3}{2} \\ \frac{4}{3}-4\ln\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+4\ln\frac{4}{3} \\ 1-4\ln\frac{4}{3} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{Bmatrix} \left(-x\dfrac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1} \\ \left(-x\dfrac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}} - \left(-x\dfrac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}} \\ -\left(-x\dfrac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=2} \end{Bmatrix}$$

# 3.3.c. Langkah 8… (hal 149)

- Disederhanakan:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 6 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + 4\ln\frac{3}{2} \\ 4\ln\frac{8}{9} \\ 1 - 4\ln\frac{4}{3} \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1} \\ \left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}} - \left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=2} \end{Bmatrix}$$

# *3.3.d.* Assembling… (hal 149)

- Prosedur aplikasi KBI [kontinuitas $U(x)$] dalam sistem persamaan disebut “assembly.”
- Assembly adalah pemenuhan kontinuitas dalam “solusi coba” pada elemen-elemen.
- Secara umum persamaan konstrain dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_i = a_j$$

- Sehingga assembly terdiri atas penambahan Kolom ***i*** dan ***j***, dan Baris ***i*** dan ***j***.

# 3.3.d. Assembling... (hal 150)

- Assembly lebih mudah disajikan dalam bentuk matrik:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ 0 & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{Bmatrix}$$

- Matrik di atas adalah gabungan dari dua matrik ini:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^{(2)} \\ F_4^{(2)} \end{Bmatrix}$$

# *3.3.e.* Langkah 9, KBI… (hal 151)

- Kondisi Batas Internal diaplikasikan

$$\left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}}=\left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}}$$

$$\left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}}-\left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=\frac{3}{2}}=0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 6 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -2+4\ln\frac{3}{2} \\ 4\ln\frac{8}{9} \\ 1-4\ln\frac{4}{3} \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1} \\ 0 \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=2} \end{Bmatrix}$$

# *3.3.f.* Langkah 9, KB... (hal 152)

- Tampak bahwa KBI "flux" adalah KBI unconstrained, sama dengan KB natural yang asli.
- Nanti akan terlihat bahwa "flux" tidak kontinu di antara elemen, karena hal di atas.
- Aplikasi KB natural menghasilkan:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & 6 & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 + 4 \ln \frac{3}{2} \\ 4 \ln \frac{8}{9} \\ 1 - 4 \ln \frac{4}{3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left( -x \frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx} \right)_{x=1} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

## *3.3.g.* Langkah 9, KB… (hal 152)

- Kondisi batas ***U*(1) = 2**

$$\hat{U}^{(1)}(1;a) = a_1 \varnothing_1(1) + a_2 \varnothing_2(1) = 2$$

$$\hat{U}(1;a) = a_1 1 + a_2 0 = 2$$

$$a_1 = 2$$

- Kalikan Kolom 1 dengan 2 dan kurangi RHS, kemudian delete Kolom 1 dan Baris 1, sehingga menghasilkan

$$\begin{bmatrix} 6 & -\dfrac{7}{2} \\ -\dfrac{7}{2} & \dfrac{7}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \ln \dfrac{8}{9} + 5 \\ 1 - 4 \ln \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

## 3.3.h. Langkah 10 & 11 (hal.153)

10. Selesaikan pers. sehingga diperoleh nilai:

$a_1 = 2$, $a_2 = 1.551$, $a_3 = 1.551$, $a_4 = 1.365$

Jadi penyelesaian pendekatannya adalah:

$$\hat{U}^{(1)}(x) = 2.000\, \mathit{Ø}_1(x) + 1.551\, \mathit{Ø}_2(x)$$

$$\hat{U}^{(2)}(x) = 1.551\, \mathit{Ø}_3(x) + 1.365\, \mathit{Ø}_4(x)$$

11. Hitung debit:

$\tau^{(1)}(x) = 0.898\, x$ **dan** $\tau^{(2)}(x) = 0.372\, x$

# 3.3.i. Langkah 12 (hal.154)

12. Plot penyelesaiannya dan prakirakan ketelitiannya, lihat Gambar 5.13 (hal 154)
    - **$\hat{U}^{(1)}(1) = 2$**

      tepat memenuhi kondisi batas $U(1) = 2$
    - **$\tau^{(2)}(2) = 0.744$**

      tidak memenuhi kondisi batas $\tau(2) = 0.5$

    Penyelesaian dua elemen ini sebaiknya dibandingkan dengan penyelesaian satu elemen yang disajikan dalam Gambar 4.5 (hal 117).

## 3.4. Assembly: Notasi Rasional (hal 156)

- KBI esential menghasilkan persyaratan $a_2=a_3$, hal ini membuat "trial solution" harus ditulis sbb:

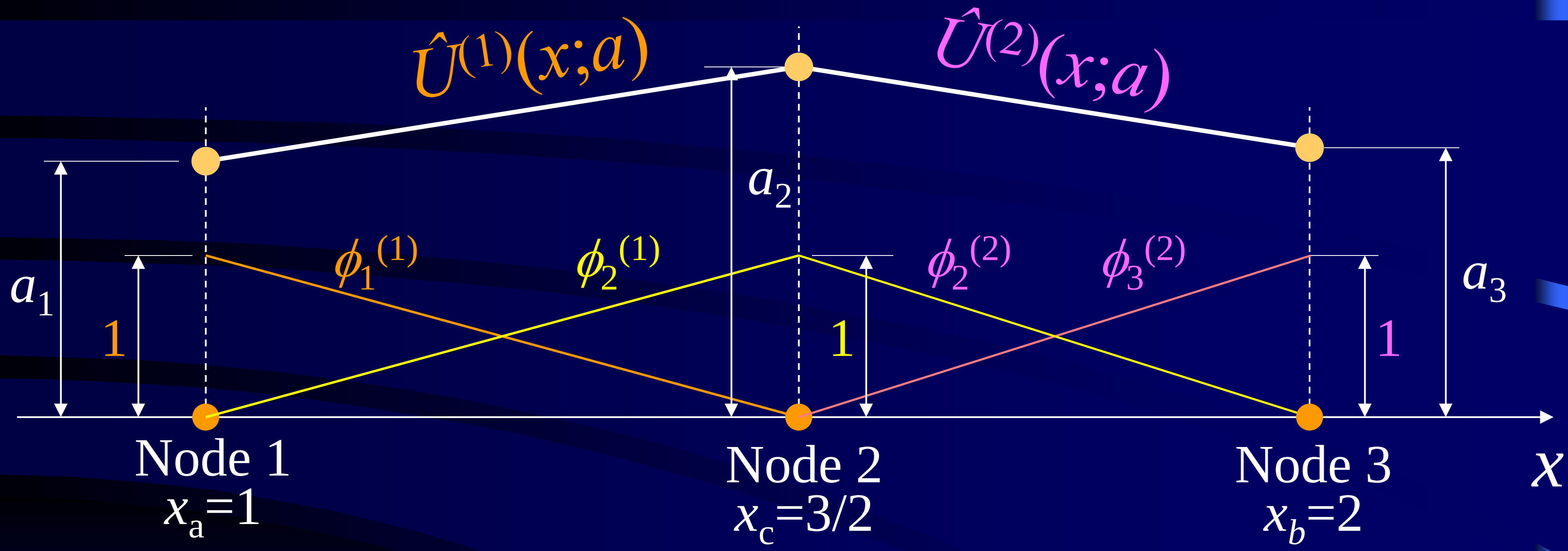
$$\hat{U}^{(1)}(x;a) = a_1 \varnothing_1(x) + a_2 \varnothing_2(x)$$
$$\hat{U}^{(2)}(x;a) = a_2 \varnothing_3(x) + a_4 \varnothing_4(x)$$

- Karena $\varnothing_2(x)$ dan $\varnothing_3(x)$ dalam persamaan di atas merupakan dua buah "shape function" yang kontinu, maka notasi yang terbaik adalah sbb:

$$\hat{U}^{(1)}(x;a) = a_1 \varnothing_1^{(1)}(x) + a_2 \varnothing_2^{(1)}(x)$$
$$\hat{U}^{(2)}(x;a) = a_2 \varnothing_2^{(2)}(x) + a_3 \varnothing_3^{(2)}(x)$$

# 3.4. Assembly: Notasi Rasional (hal 157)

Notasi $\hat{U}(x;a)$ dan $\phi(x)$




$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

# 3.4. Assembly: Notasi Rasional (hal 157)

- Assembly dalam notasi yang lebih baik:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

- Matrik di atas adalah gabungan dari dua matrik ini:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

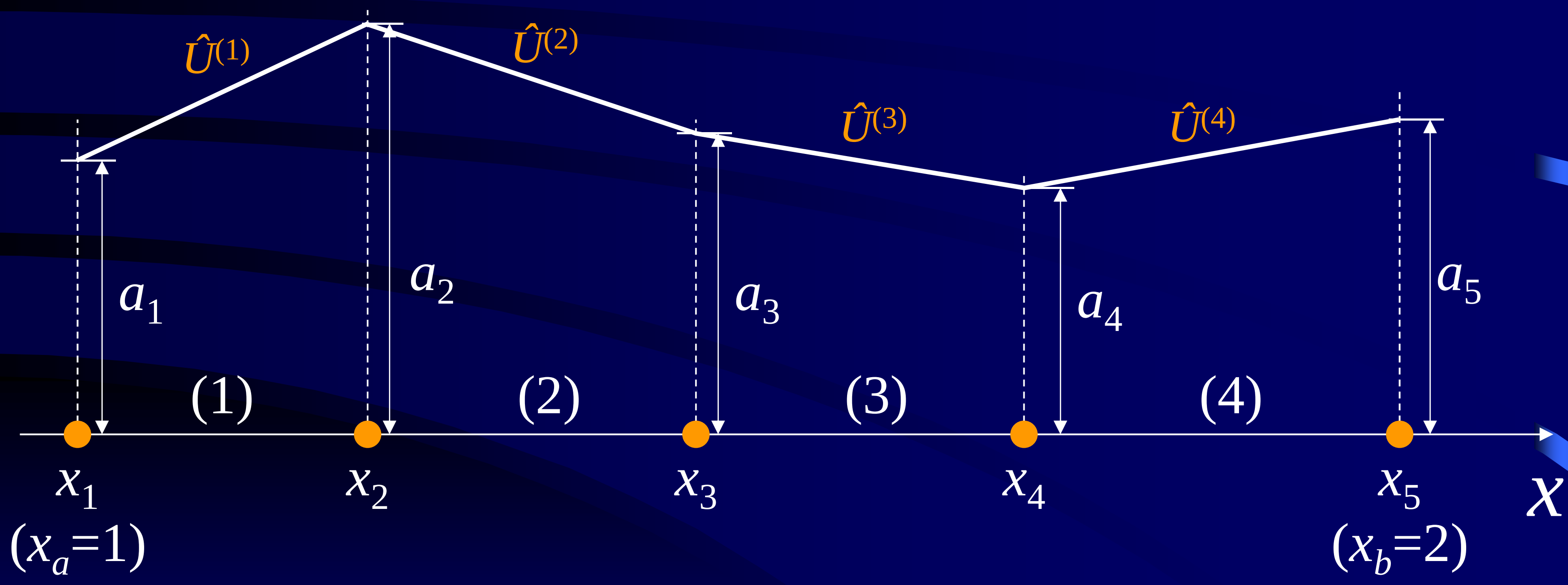
Elemen 1

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Elemen 2

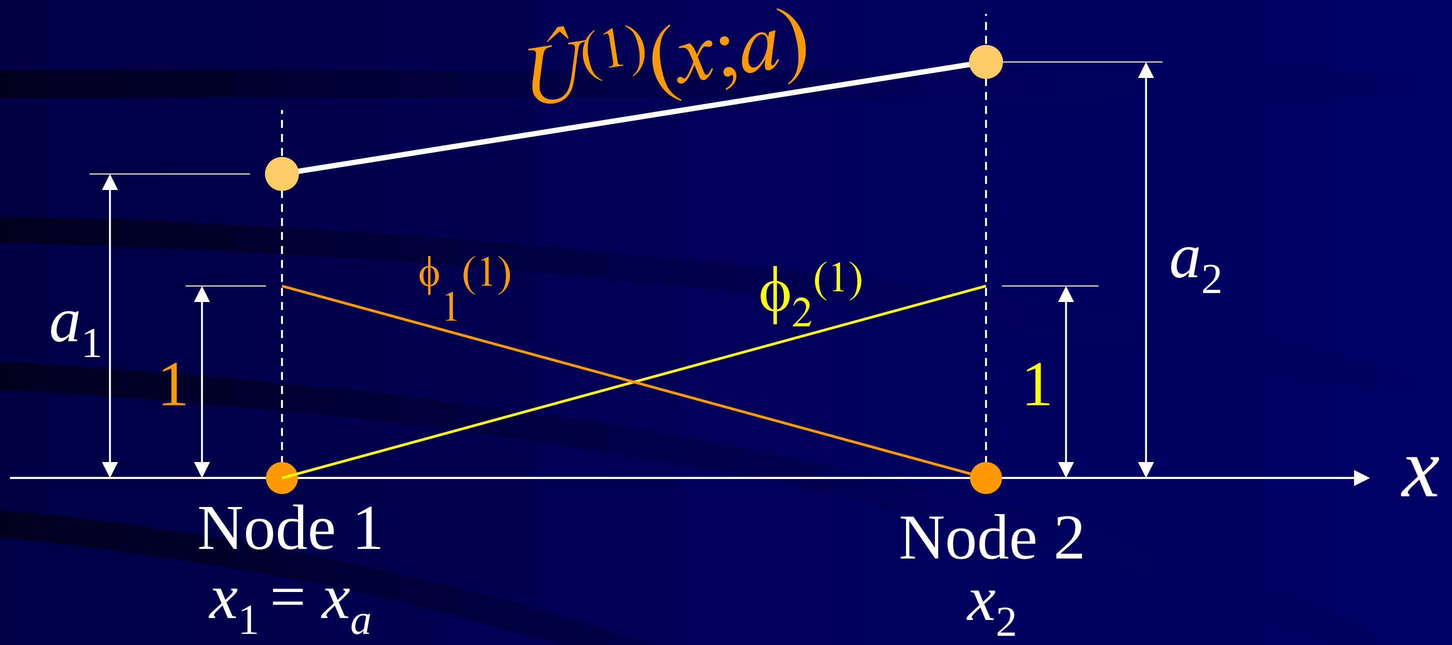
# 4. Persamaan 4 Elemen (hal 158)

- Domain dibagi menjadi 4 subdomain/elemen



# 4.a. Elemen Pertama (hal 158)

Solusi coba $\hat{U}^{(1)}(x;a)$ dan fungsi bentuk $\phi(x)$

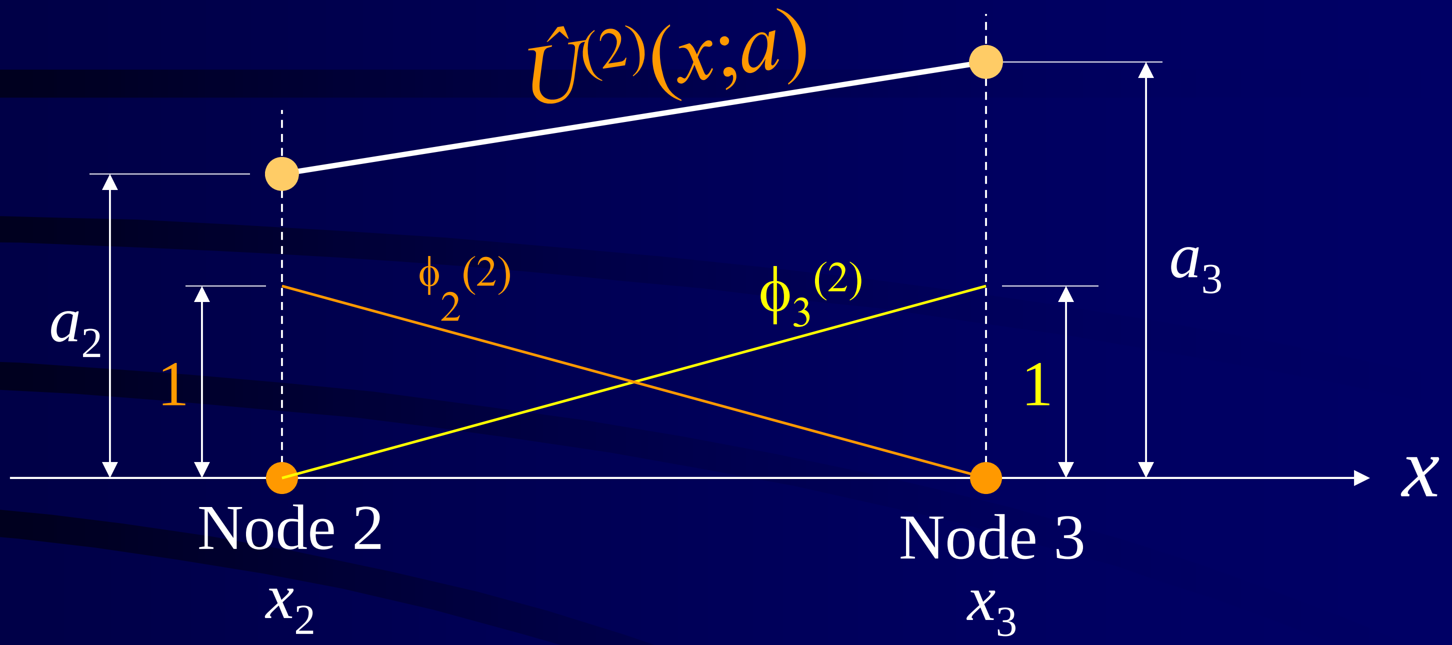



$$\hat{U}^{(1)}(x;a) = a_1 \varnothing_1^{(1)}(x) + a_2 \varnothing_2^{(1)}(x)$$

$$\phi_1^{(1)}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{dan} \quad \phi_2^{(1)}(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

# 4.b. Elemen Kedua (hal 158)

Solusi coba $\hat{U}^{(2)}(x;a)$ dan fungsi bentuk $\phi(x)$

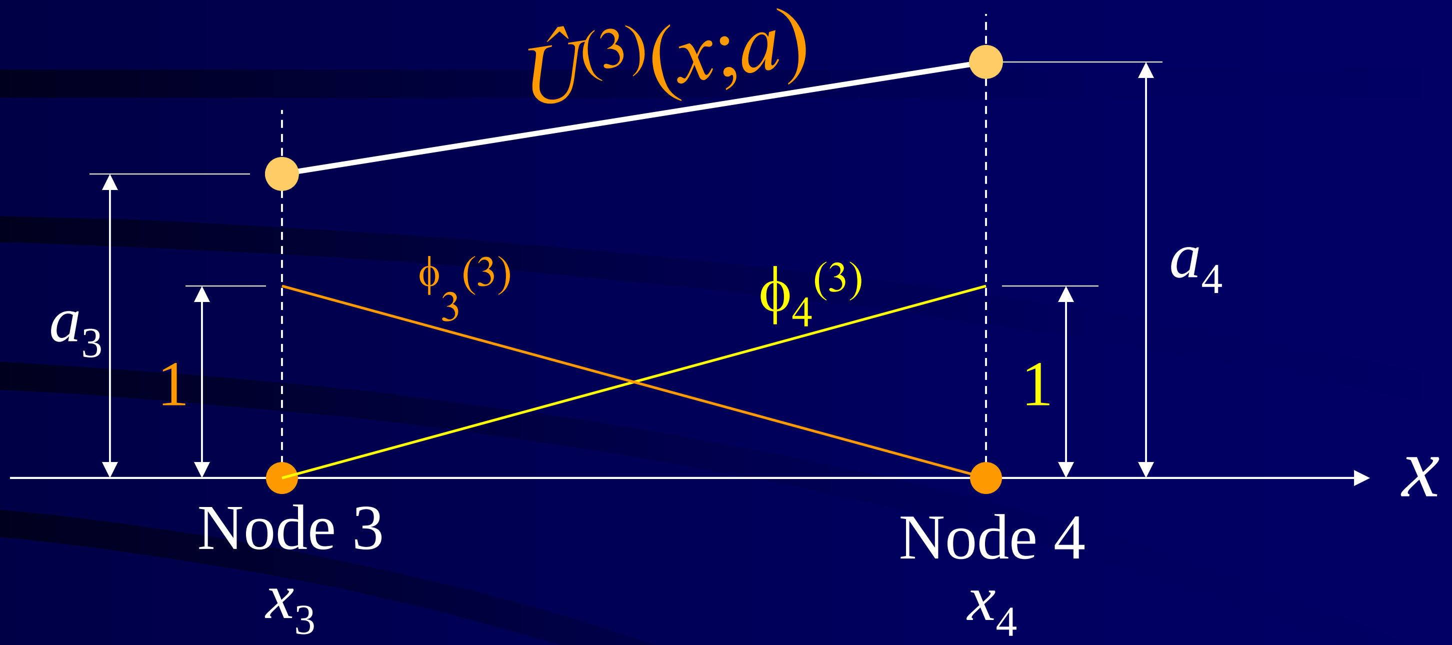



$$\hat{U}^{(2)}(x;a) = a_2 \varnothing_2^{(2)}(x) + a_3 \varnothing_3^{(2)}(x)$$

$$\phi_2^{(2)}(x) = \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} \quad \text{dan} \quad \phi_3^{(2)}(x) = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

# 4.c. Elemen Ketiga (hal 158)

Solusi coba $\hat{U}^{(3)}(x;a)$ dan fungsi bentuk $\phi(x)$

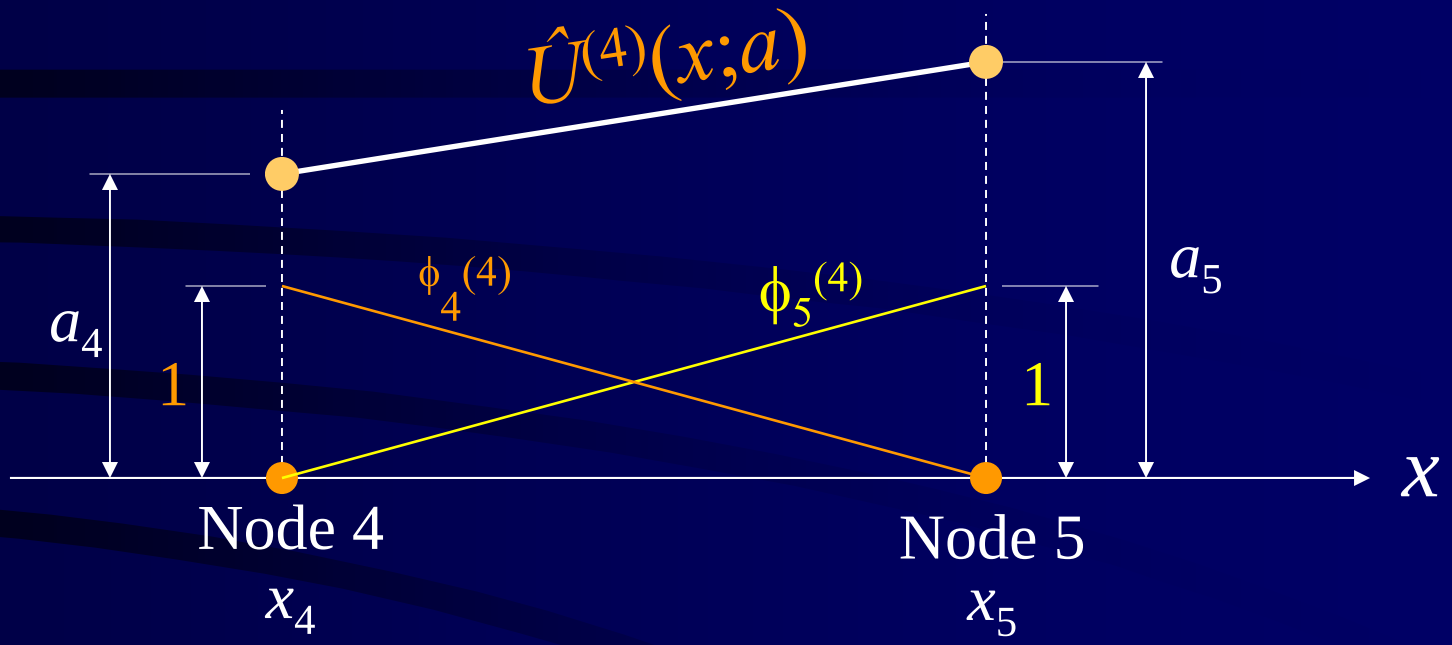



$$\hat{U}^{(3)}(x;a) = a_3 \varnothing_3^{(3)}(x) + a_4 \varnothing_4^{(3)}(x)$$

$$\phi_3^{(3)}(x) = \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} \quad \text{dan} \quad \phi_4^{(3)}(x) = \frac{x - x_3}{x_4 - x_3}$$

# 4.d. Elemen Keempat (hal 158)

Solusi coba $\hat{U}^{(4)}(x;a)$ dan fungsi bentuk $\phi(x)$




$$\hat{U}^{(4)}(x;a) = a_4 \phi_4^{(4)}(x) + a_5 \phi_5^{(4)}(x)$$

$$\phi_4^{(4)}(x) = \frac{x_5 - x}{x_5 - x_4} \quad \text{dan} \quad \phi_5^{(4)}(x) = \frac{x - x_4}{x_5 - x_4}$$

# 4.e. Resume Empat Elemen (hal 158)

Notasi global untuk seluruh elemen

Elemen 1

$$\hat{U}^{(1)}(x;a) = a_1 Ø_1^{(1)}(x) + a_2 Ø_2^{(1)}(x)$$

$$\phi_1^{(1)}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{dan} \quad \phi_2^{(1)}(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Elemen 2

$$\hat{U}^{(2)}(x;a) = a_2 Ø_2^{(2)}(x) + a_3 Ø_3^{(2)}(x)$$

$$\phi_2^{(2)}(x) = \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} \quad \text{dan} \quad \phi_3^{(2)}(x) = \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

Elemen 3

$$\hat{U}^{(3)}(x;a) = a_3 Ø_3^{(3)}(x) + a_4 Ø_4^{(3)}(x)$$

$$\phi_3^{(3)}(x) = \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} \quad \text{dan} \quad \phi_4^{(3)}(x) = \frac{x - x_3}{x_4 - x_3}$$

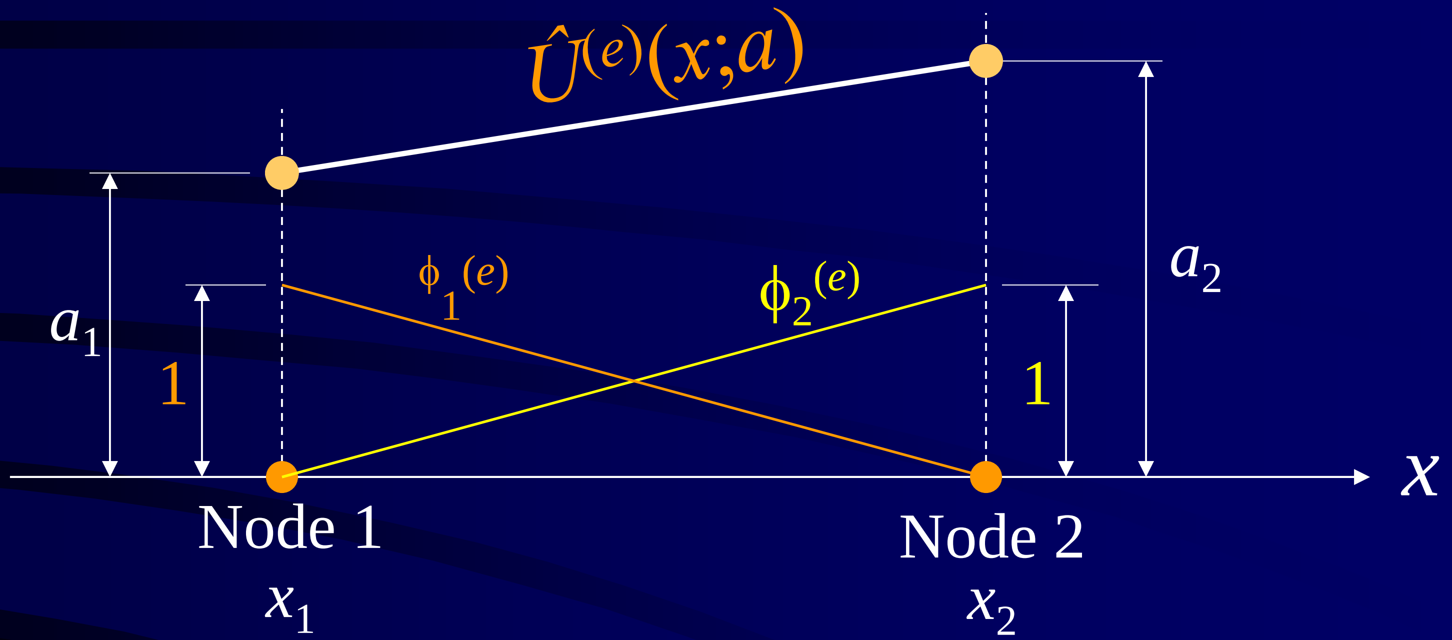
Elemen 4

$$\hat{U}^{(4)}(x;a) = a_4 Ø_4^{(4)}(x) + a_5 Ø_5^{(4)}(x)$$

$$\phi_4^{(4)}(x) = \frac{x_5 - x}{x_5 - x_4} \quad \text{dan} \quad \phi_5^{(4)}(x) = \frac{x - x_4}{x_5 - x_4}$$

# 4.f. Notasi Elemen Lokal (hal 159)

Solusi coba $\hat{U}^{(e)}(x;a)$ dan fungsi bentuk $\phi(x)$




$$\boxed{\hat{U}^{(e)}(x;a) = a_1 \phi_1^{(e)}(x) + a_2 \phi_2^{(e)}(x)}$$

$$\phi_1^{(e)}(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \text{dan} \quad \phi_2^{(e)}(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

# 4.g. Notasi Lokal ke Global (hal 160)

- Setiap notasi lokal harus disesuaikan dengan notasi global dan sebaliknya.
- Untuk kasus 4 elemen linier di atas disusun tabel koneksi koordinat lokal ke global

| Element | Titik Lokal 1 menjadi Titik Global | Titik Lokal 2 menjadi Titik Global |
|---|---|---|
| (1) | 1 | 2 |
| (2) | 2 | 3 |
| (3) | 3 | 4 |
| (4) | 4 | 5 |

# 4.h. 4 Elemen: Langkah 1-6 (hal 160)

- Langkah 1-6 menghasilkan matriks, dalam notasi lokal:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1} & -\frac{1}{2}\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1} \\ -\frac{1}{2}\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1} & \frac{1}{2}\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1} \\ -\frac{2}{x_2} - \frac{2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}^{(e)}}{dx}\right)_{x_1} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(e)}}{dx}\right)_{x_2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(e)} & K_{12}^{(e)} \\ K_{21}^{(e)} & K_{22}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(e)} \\ F_2^{(e)} \end{Bmatrix}$$

- *Debit/Flux* dihitung sbb:

$$\hat{\tau}^{(e)}(x) = -x\frac{d\hat{U}^{(e)}}{dx} = -x\left(a_1\frac{d\phi_1^{(e)}(x)}{dx} + a_2\frac{d\phi_2^{(e)}(x)}{dx}\right) = \frac{x}{x_2-x_1}(a_1-a_2)$$

# 4.i. 4 Elemen: Langkah 7 (hal 160)

1. Pembuatan Kisi (data geometrik)
   a) Definisi titik: tentukan koordinat setiap titik dan berilah nomor. Dalam contoh soal di sini, digunakan 4 elemen yang sama panjang, sehingga koordinat masing-masing titik: $x_1 = 1.00$, $x_2 = 1.25$, $x_3 = 1.50$, $x_4 = 1.75$, $x_5 = 2.00$
   b) Definisi elemen: tentukan nomor titik dalam setiap elemen. Nomor titik dan elemen didefinisikan seperti dalam Gambar 5.17 (hal 158). Dalam program komputer nomor-nomor ini akan disimpan dalam array koneksitas seperti dalam Tabel 5.1 (hal 160)

2. Data karakteristik fisik dan beban.

# 4.j. Elemen 1: Langkah 8 (hal 162)

- Dengan Tabel 5.1 (hal 160) untuk Elemen 1 (Ttk Lokal 1 menjadi Ttk Global 1, Ttk Lokal 2 menjadi Ttk Global 2) kita gunakan Pers. 5.80 (hal 160). Gunakan data lapangan: $x_1$ = 1.00, $x_2$ = 1.25, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2+8\ln\frac{5}{4} \\ \frac{8}{5}-8\ln\frac{5}{4} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1.00} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1.25} \end{Bmatrix}$$

- Dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

# 4.j. Elemen 2: Langkah 8 (hal 162)

- Dengan Tabel 5.1 (hal 160) untuk Elemen 1 (Ttk Lokal 1 menjadi Ttk Global 2, Ttk Lokal 2 menjadi Ttk Global 3) kita gunakan Pers. 5.80 (hal 160). Gunakan data lapangan: $x_2$ = 1.25, $x_3$ = 1.50, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{8}{5} + 8\ln\frac{6}{5} \\ \frac{4}{3} - 8\ln\frac{6}{5} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.25} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.50} \end{Bmatrix}$$

- Dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

# 4.j. Elemen 3: Langkah 8 (hal 164)

- Dengan Tabel 5.1 (hal 160) untuk Elemen 1 (Ttk Lokal 1 menjadi Ttk Global 3, Ttk Lokal 2 menjadi Ttk Global 4) kita gunakan Pers. 5.80 (hal 160). Gunakan data lapangan: $x_3$ = 1.50, $x_4$ = 1.75, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{13}{2} & -\frac{13}{2} \\ -\frac{13}{2} & \frac{13}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{3} + 8\ln\frac{7}{6} \\ \frac{8}{7} - 8\ln\frac{7}{6} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.50} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.75} \end{Bmatrix}$$

- Dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ K_{43}^{(3)} & K_{43}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} \end{Bmatrix}$$

# 4.j. Elemen 4: Langkah 8 (hal 165)

- Dengan Tabel 5.1 (hal 160) untuk Elemen 1 (Ttk Lokal 1 menjadi Ttk Global 3, Ttk Lokal 2 menjadi Ttk Global 4) kita gunakan Pers. 5.80 (hal 160). Gunakan data lapangan: $x_4$ = 1.75, $x_5$ = 2.00, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \\ -\frac{15}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{8}{7} + 8\ln\frac{8}{7} \\ 1 - 8\ln\frac{8}{7} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}^{(4)}}{dx}\right)_{x=1.75} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(4)}}{dx}\right)_{x=2.00} \end{Bmatrix}$$

- Dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} \\ K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^{(4)} \\ F_4^{(4)} \end{Bmatrix}$$

# 4.j. Assembling: Langkah 8 (hal 166)

- Assembling semua komponen menjadi matrik global:

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & & & \\ -\frac{9}{2} & \frac{9}{2}+\frac{11}{2} & -\frac{11}{2} & & \\ & -\frac{11}{2} & \frac{11}{2}+\frac{13}{2} & -\frac{13}{2} & \\ & & -\frac{13}{2} & \frac{13}{2}+\frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \\ & & & -\frac{15}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2+8\ln\frac{5}{4} \\ \frac{8}{5}-8\ln\frac{5}{4}-\frac{8}{5}+8\ln\frac{6}{5} \\ \frac{4}{3}-8\ln\frac{6}{5}-\frac{4}{3}+8\ln\frac{7}{6} \\ \frac{8}{7}-8\ln\frac{7}{6}-\frac{8}{7}+8\ln\frac{8}{7} \\ 1-8\ln\frac{8}{7} \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1.00} \\ \left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.25} - \left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1.25} \\ \left(-x\frac{d\hat{U}^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.50} - \left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.50} \\ \left(-x\frac{d\hat{U}^{(4)}}{dx}\right)_{x=1.75} - \left(-x\frac{d\hat{U}^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.75} \\ -\left(-x\frac{d\hat{U}^{(4)}}{dx}\right)_{x=2.00} \end{Bmatrix}$$

# 4.j. Assembling: Langkah 8 (hal 166)

- Dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} + K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} + F_3^{(3)} \\ F_4^{(3)} + F_4^{(4)} \\ F_5^{(4)} \end{Bmatrix}$$

# 4.j. Assembling: Langkah 8 (hal 167)

- Matriks global disederhanakan:

$$
\begin{bmatrix}
\frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{9}{2} & 10 & -\frac{11}{2} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{11}{2} & 12 & -\frac{13}{2} & 0 \\
0 & 0 & -\frac{13}{2} & 14 & -\frac{15}{2} \\
0 & 0 & 0 & -\frac{15}{2} & \frac{15}{2}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix}
-2+8\ln\frac{5}{4} \\
8\ln\frac{24}{25} \\
8\ln\frac{35}{36} \\
8\ln\frac{48}{49} \\
1-8\ln\frac{8}{7}
\end{Bmatrix}
+
\begin{Bmatrix}
\left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1.00} \\
\left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.25} - \left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1.25} \\
\left(-x\frac{d\hat{U}^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.50} - \left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.50} \\
\left(-x\frac{d\hat{U}^{(4)}}{dx}\right)_{x=1.75} - \left(-x\frac{d\hat{U}^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.75} \\
-\left(-x\frac{d\hat{U}^{(4)}}{dx}\right)_{x=2.00}
\end{Bmatrix}
$$

# 4.k. Langkah 9:Aplikasi Kondisi Batas (hal 168-169)

- Aplikasikan KBI dan KB natural:

$$\left(-x\frac{d\hat{U}^{(4)}}{dx}\right)_{x=2}=\frac{1}{2}$$

$$\left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.25}-\left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1.25}=0 \quad \left(-x\frac{d\hat{U}^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.5}-\left(-x\frac{d\hat{U}^{(2)}}{dx}\right)_{x=1.5}=0 \quad \left(-x\frac{d\hat{U}^{(4)}}{dx}\right)_{x=1.75}-\left(-x\frac{d\hat{U}^{(3)}}{dx}\right)_{x=1.75}=0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{2} & 10 & -\frac{11}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11}{2} & 12 & -\frac{13}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & 14 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2+8\ln\frac{5}{4} \\ 8\ln\frac{24}{25} \\ 8\ln\frac{35}{36} \\ 8\ln\frac{48}{49} \\ 1-8\ln\frac{8}{7} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}^{(1)}}{dx}\right)_{x=1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

## 4.k. Langkah 9:Aplikasi Kondisi Batas (hal 169)

- Aplikasikan KB esensial $U(1) = 2$, menghasilkan pada Elemen 1: $a_1 = 2$.
- Eliminasi $a_1$ dari persamaan dengan mengalikan Kolom 1 x 2, hasilnya dikurangkan ke RHS dan Baris 1 dihilangkan dari persamaan.

$$\begin{bmatrix} 10 & -\frac{11}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{11}{2} & 12 & -\frac{13}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{13}{2} & 14 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 + 8\ln\frac{24}{25} \\ 8\ln\frac{35}{36} \\ 8\ln\frac{48}{49} \\ \frac{1}{2} - 8\ln\frac{8}{7} \end{Bmatrix}$$

## 4.k. Langkah 10: Penyelesaian Persamaan
(hal 170)

- Dengan menggunakan eliminasi Gauss, sistem persamaan Pers. 5.105 (hal 169), diperoleh $a_2 = 1.714$, $a_3 = 1.540$, $a_4 = 1.427$, $a_5 = 1.352$
- Dan dari persamaan konstrain KB, $a_1 = 2.000$
- Sehingga diperoleh solusi coba tiap elemen sbb:

$$\hat{U}^{(1)}(x) = 2.000\left(\frac{1.25 - x}{1.25 - 1.00}\right) + 1.714\left(\frac{x - 1.00}{1.25 - 1.00}\right)$$

$$\hat{U}^{(2)}(x) = 1.714\left(\frac{1.50 - x}{1.50 - 1.25}\right) + 1.540\left(\frac{x - 1.25}{1.50 - 1.25}\right)$$

$$\hat{U}^{(3)}(x) = 1.540\left(\frac{1.75 - x}{1.75 - 1.50}\right) + 1.427\left(\frac{x - 1.50}{1.75 - 1.50}\right)$$

$$\hat{U}^{(4)}(x) = 1.427\left(\frac{2.00 - x}{2.00 - 1.75}\right) + 1.352\left(\frac{x - 1.75}{2.00 - 1.75}\right)$$

# 4.k. Langkah 11-12: Hitung Debit (hal 170)

- Debit/flux dihitung sbb:

$$\hat{\tau}^{(1)}(x) = \frac{a_1 - a_2}{x_2 - x_1} x = 1.144x \qquad \hat{\tau}^{(2)}(x) = \frac{a_2 - a_3}{x_3 - x_2} x = 0.696x$$

$$\hat{\tau}^{(3)}(x) = \frac{a_3 - a_4}{x_4 - x_3} x = 0.452x \qquad \hat{\tau}^{(4)}(x) = \frac{a_4 - a_5}{x_5 - x_4} x = 0.300x$$

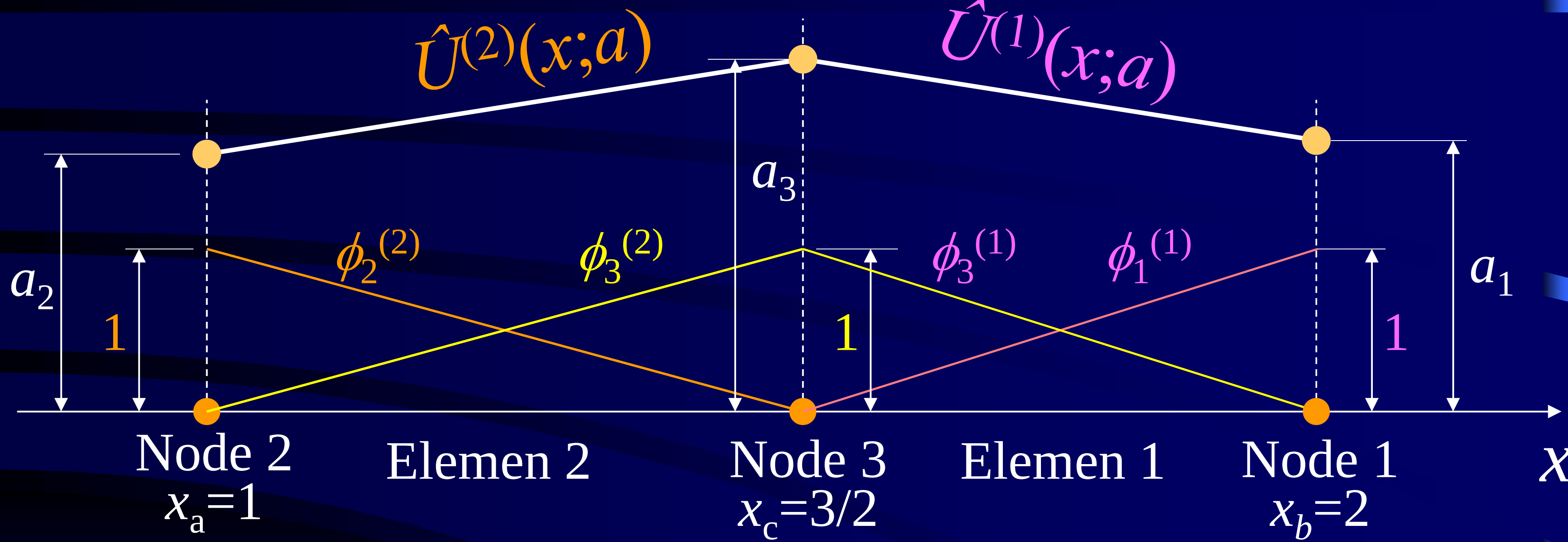
- Plot solusi coba dan debit serta estimasi ketelitiannya (lihat hal 171).
- Perhatikan solusi coba kontinu namun debit tidak.

# 5. Delapan Elemen & 6. Konvergensi

- Prosedure penyelesaian solusi coba dengan delapan elemen dapat dilihat dalam Buku Pegangan, hal. 173-185.
- Perbaikan kisi FEM dan kondisi konvergensi dibahas dalam Buku Pegangan, hal. 185-189

# 7. Penomoran Elemen Random (hal 189)

Notasi $\hat{U}(x;a)$ dan $\phi(x)$




$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} & K_{31}^{(1)} \\ K_{13}^{(1)} & K_{11}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \end{Bmatrix}$$

# 7. ...Assembly... (hal 189)

- Assembly:

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & 0 \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(1)} & K_{31}^{(1)} \\ 0 & K_{13}^{(1)} & K_{11}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} + F_3^{(1)} \\ F_1^{(1)} \end{Bmatrix}$$

- Matrik di atas adalah gabungan dari dua matrik ini:

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Elemen 1

$$\begin{bmatrix} K_{33}^{(1)} & K_{31}^{(1)} \\ K_{13}^{(1)} & K_{11}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(1)} \\ F_3^{(1)} \end{Bmatrix}$$

Elemen 2

# 7. ...Urutan ... (hal 189)

- Secara teoretis sistem persamaan linier di atas dapat diselesaikan pula secara mudah.
- Walaupun arraynya tidak urut tetapi

$$\{a_2, a_3, a_1\}^t$$

- Namun penyelesaian dengan komputer lebih mudah kalau suatu array disusun dengan urutan dari kecil ke besar yaitu

$$\{a_1, a_2, a_3\}^t$$

# 7. ...Pengurutan... (hal 191)

- Matrik asli:

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & 0 \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(1)} & K_{31}^{(1)} \\ 0 & K_{13}^{(1)} & K_{11}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} + F_3^{(1)} \\ F_1^{(1)} \end{Bmatrix}$$

- Matrik sesudah diurutkan:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & 0 & K_{13}^{(1)} \\ 0 & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} + K_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} + F_3^{(1)} \end{Bmatrix}$$

# 7. Assembly Secara Umum (hal 191)

- Matrik residual pada elemen *e* dan nomor titik global *s* dan *r*:

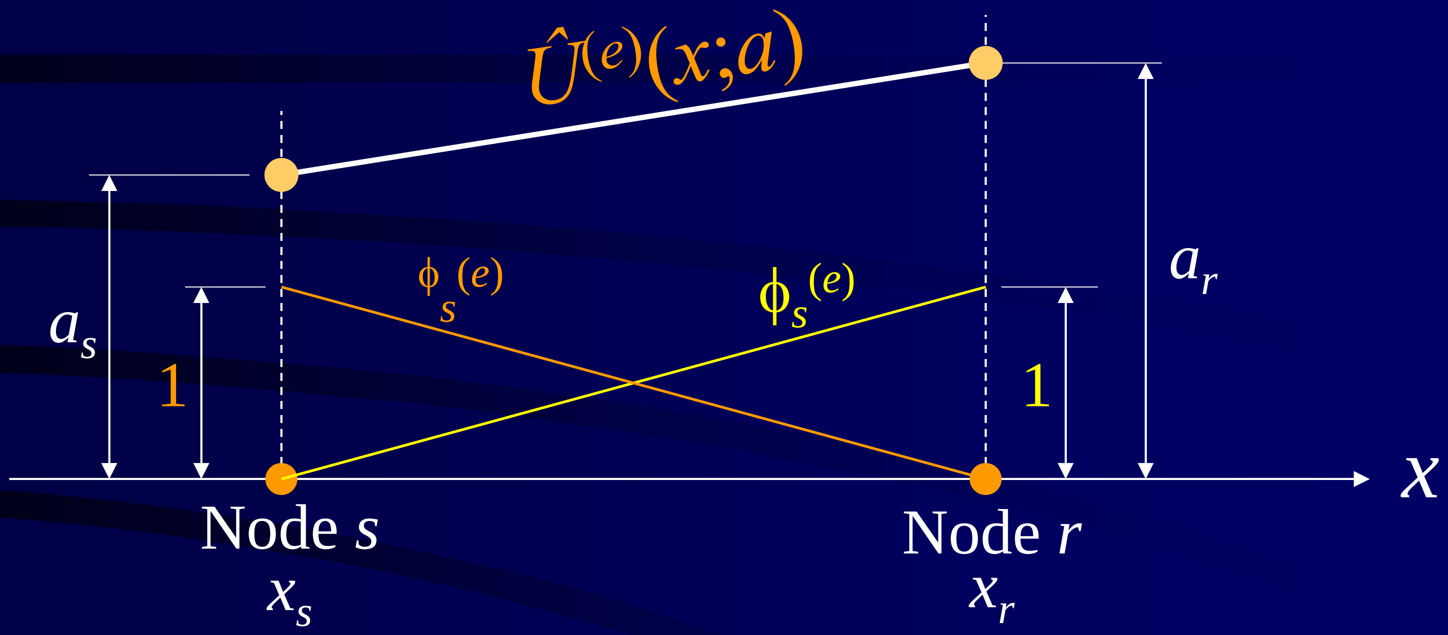
$$\begin{bmatrix} K_{ss}^{(e)} & K_{sr}^{(e)} \\ K_{rs}^{(e)} & K_{rr}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_s \\ a_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s^{(e)} \\ F_r^{(e)} \end{Bmatrix}$$

- Tambahkan $K_{sr}^{(e)}$ ke dalam Baris *s* dan Kolom *r* pada matriks besar, dan tambahkan $F_s^{(e)}$ ke Baris *s* kedalam vektor beban:

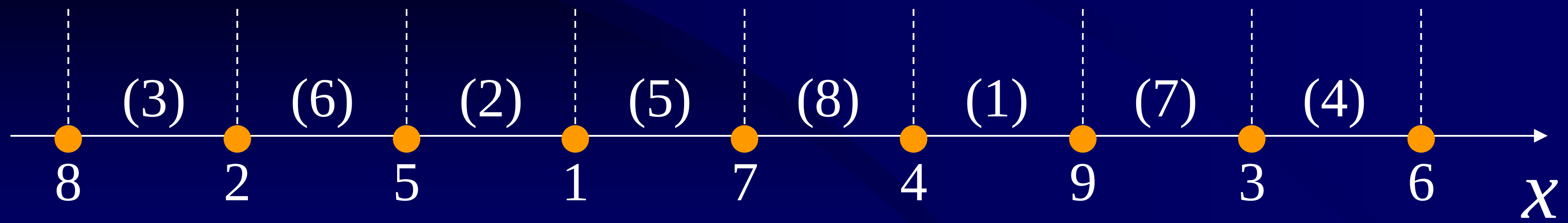
$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} \text{Kolom } s & \text{Kolom } r \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Baris } s \rightarrow \\ \text{Baris } r \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} K_{ss}^{(e)} & K_{sr}^{(e)} \\ K_{rs}^{(e)} & K_{rr}^{(e)} \end{bmatrix} \end{array} \begin{Bmatrix} a_s \\ a_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s^{(e)} \\ F_r^{(e)} \end{Bmatrix}$$

# 7. Sifat Penomoran Random (hal.192)

- Penomoran global di elemen




- Penomoran global untuk penyelesaian



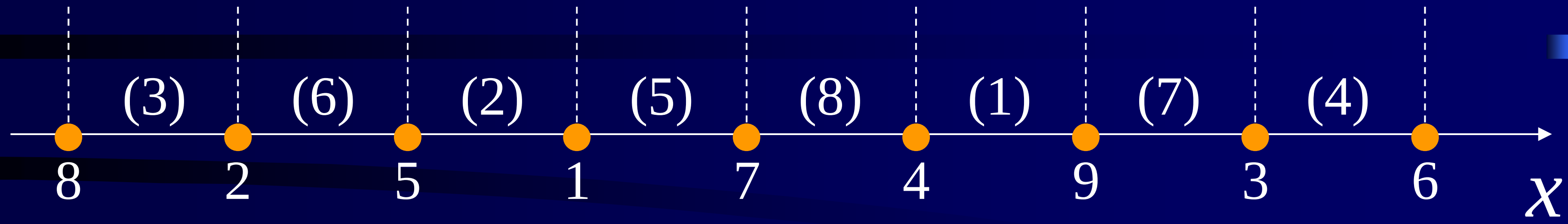
# 7. Tabel Koneksitas 8 elemen (hal 192)

- Setiap notasi lokal harus disesuaikan dengan notasi global dan sebaliknya.
- Untuk kasus 8 elemen linier di atas disusun tabel koneksi koordinat lokal ke global

| Nomor Elemen | Titik Lokal 1 menjadi Titik Global | Titik Lokal 2 menjadi Titik Global |
|---|---|---|
| (1) | 4 | 9 |
| (2) | 5 | 1 |
| (3) | 8 | 2 |
| (4) | 3 | 6 |
| (5) | 1 | 7 |
| (6) | 2 | 5 |
| (7) | 9 | 3 |
| (8) | 7 | 4 |

# 7. Matriks Persamaan Elemen (hal.192)

- Penomoran global




- Matriks Residual di elemen

$$\begin{bmatrix} K_{88}^{(3)} & K_{82}^{(3)} \\ K_{28}^{(3)} & K_{22}^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_8 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_8^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(6)} & K_{25}^{(6)} \\ K_{52}^{(6)} & K_{55}^{(6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2^{(6)} \\ F_5^{(6)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{55}^{(2)} & K_{51}^{(2)} \\ K_{15}^{(2)} & K_{11}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_5 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_5^{(2)} \\ F_1^{(2)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(5)} & K_{17}^{(5)} \\ K_{71}^{(6)} & K_{77}^{(6)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(5)} \\ F_7^{(5)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{77}^{(8)} & K_{74}^{(8)} \\ K_{47}^{(8)} & K_{44}^{(8)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_7 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_7^{(8)} \\ F_4^{(8)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{44}^{(1)} & K_{49}^{(1)} \\ K_{94}^{(1)} & K_{99}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4^{(1)} \\ F_9^{(1)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{99}^{(7)} & K_{93}^{(7)} \\ K_{39}^{(7)} & K_{33}^{(7)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_9 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_9^{(7)} \\ F_3^{(7)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{33}^{(4)} & K_{36}^{(4)} \\ K_{63}^{(4)} & K_{66}^{(4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_3 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3^{(4)} \\ F_6^{(4)} \end{Bmatrix}$$

understand the pattern

# 7. Matriks Lengkap 8 Elemen (hal.193)

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(2)}+K_{11}^{(5)} & 0 & 0 & 0 & K_{15}^{(2)} & 0 & K_{17}^{(5)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22}^{(3)}+K_{22}^{(6)} & 0 & 0 & K_{25}^{(6)} & 0 & 0 & K_{28}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33}^{(4)}+K_{33}^{(7)} & 0 & 0 & K_{36}^{(4)} & 0 & 0 & K_{39}^{(7)} \\ 0 & 0 & 0 & K_{44}^{(1)}+K_{44}^{(8)} & 0 & 0 & K_{47}^{(8)} & 0 & K_{49}^{(1)} \\ K_{51}^{(2)} & K_{52}^{(6)} & 0 & 0 & K_{55}^{(2)}+K_{55}^{(6)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{63}^{(4)} & 0 & 0 & K_{66}^{(4)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{71}^{(5)} & 0 & 0 & K_{74}^{(8)} & 0 & 0 & K_{77}^{(5)}+K_{77}^{(8)} & 0 & 0 \\ 0 & K_{82}^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{88}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & K_{93}^{(7)} & K_{94}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{99}^{(1)}+K_{99}^{(7)} \end{bmatrix}$$

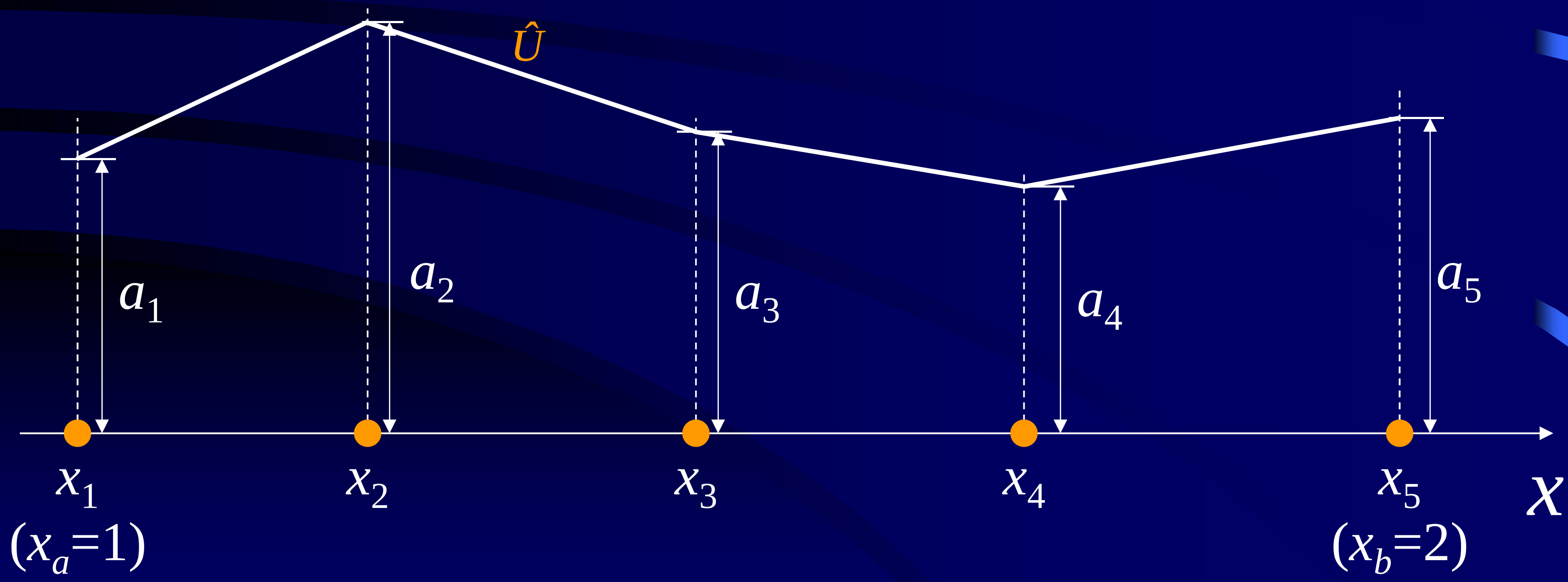
$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^{(2)}+F_1^{(5)} \\ F_2^{(3)}+F_2^{(6)} \\ F_3^{(4)}+F_3^{(7)} \\ F_4^{(1)}+F_4^{(8)} \\ F_5^{(2)}+F_5^{(6)} \\ F_6^{(4)} \\ F_7^{(5)}+F_7^{(8)} \\ F_8^{(3)} \\ F_9^{(1)}+F_9^{(7)} \end{Bmatrix}$$

# 7. Karakteristik Matriks (hal.193)

- Dengan penomoran titik dan elemen secara acak, tidak mempengaruhi jumlah anggota matriks yang mempunyai nilai nol
- Namun penomoran secara acak berakibat pada lebar pita matriks yang semakin besar, sehingga mengakibatkan penyelesaian matriks lebih lama

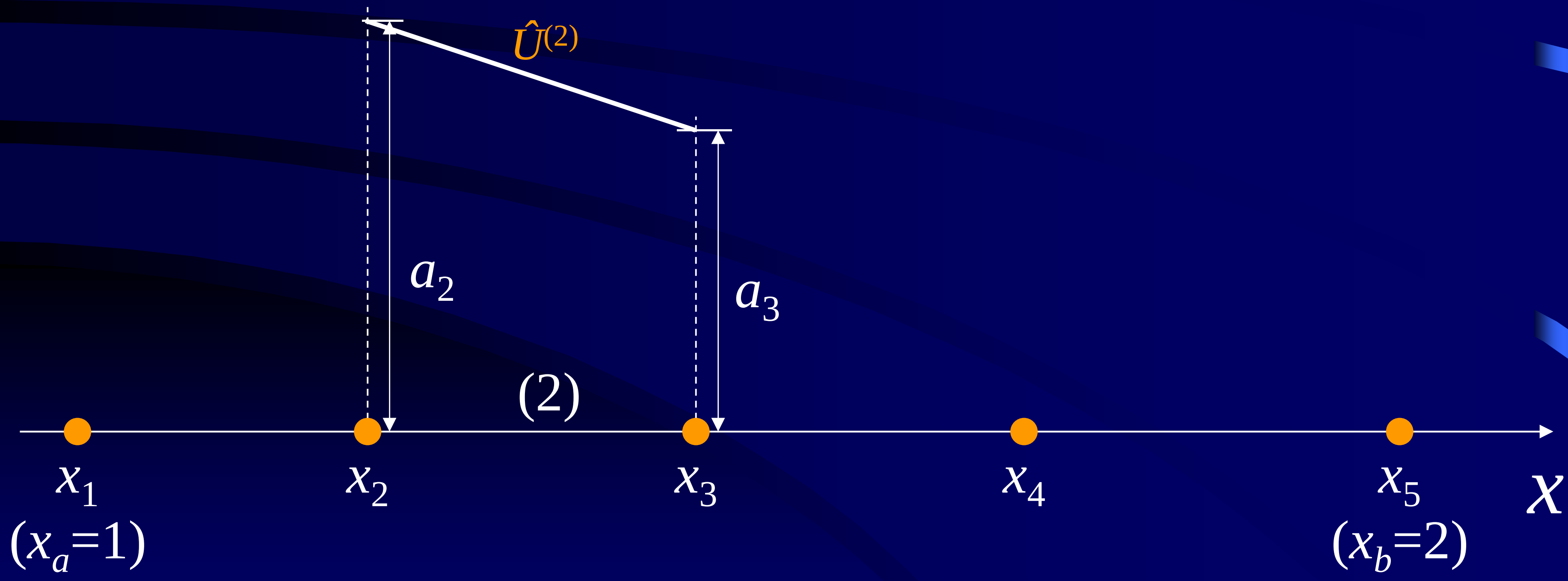
# 8. Fungsi Coba Global (hal.195)

- Fungsi coba global mempunyai nilai tidak nol (kecuali di beberapa lokasi) pada seluruh (global) domain.



# 8. Fungsi Coba dalam Elemen (hal.195)

- Fungsi coba lokal mempunyai nilai tidak nol (kecuali di beberapa lokasi) hanya pada bagian sempit (lokal) dari domain, dan identik dengan nol di lain tempat.



# 8. Keuntungan FEM (hal.196)

- Matriks stiffness biasanya mempunyai sangat banyak nol, sehingga mampu untuk menampung lebih banyak persamaan.
- Bagian yang tidak nol, biasanya diperoleh dari satu jenis elemen, jadi persamaan residual elemen dapat digunakan berulang-ulang.
- Persamaan tiap elemen sangat mudah dikumpulkan dengan menggabungkan tiap suku kedalam lokasi yang tepat kedalam matriks stiffness.
- Kondisi batas dengan mudah diaplikasikan.

# 9. 12 Langkah Untuk Elemen (hal 197)

A. Pengembangan Teori

1. Tulis persamaan residual Galerkin untuk suatu elemen
2. Integration by parts
3. Substitusi persamaan residual elemen kedalam Butir 2. Hasilnya berupa persamaan elemen.
4. Tentukan “fungsi bentuk”
5. Substitusikan “fungsi bentuk” kedalam “solusi coba” sehingga didapat sistem persamaan, dan ubah integral agar cocok untuk hitungan numerik
6. Siapkan formula untuk “debit” dengan “solusi coba”

B. Hitungan Numerik

7. Siapkan data lapangan
8. Hitung suku-suku interior dalam elemen, assemble ke dalam suku-suku sistem persamaan
9. Aplikasikan kondisi batas kedalam persamaan baik KB maupun KBI.
10. Selesaikan sistem persamaan linier
11. Hitung “debit”
12. Tayangkan “penyelesaian pendekatan” dan estimasi ketelitiannya


... be a winner ...
... and acts like winners ..