Bab 4

Dasar Kedua:

12 Langkah Penyelesaian Pendekatan

Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.
mailto:Luknanto@ugm.ac.id

Review (hal.96)

- **Analisis yang dibutuhkan:**

$\hat{U}(x;a)$

a_i harus dicari

Kriteria Optimasi pada $R(x;a)$

untuk menentukan nilai a_i terbaik

Integrasi Residual

Sistem Persamaan Linier

$\hat{U}(x;a)$

aplikasi kondisi batas secara numeris

Sistem Persamaan Linier

Penyelesaian $\hat{U}(x)$ diperoleh

I. Prosedur 12 Langkah

1. Pengembangan Teori
2. Hitungan Numerik

1. Pengembangan Teori (hal 97)

1. Tulis persamaan residual Galerkin
2. Integration by parts
3. Substitusi residual kedalam Butir 2
4. Tentukan “fungsi coba”
5. Substitusikan kedalam sistem persamaan, dan ubah integral agar cocok untuk hitungan numerik
6. Siapkan formula untuk “debit” dengan “fungsi coba”

2. Hitungan Numerik (hal 97)

7. Siapkan data lapangan
8. Hitung suku-suku interior dalam sistem persamaan
9. Aplikasikan kondisi batas kedalam persamaan
10. Selesaikan sistem persamaan linier
11. Hitung “debit”
12. Tayangkan “penyelesaian pendekatan” dan estimasi ketelitiannya

II. Contoh Soal (hal.98)

Persamaan dasar:

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{dU(x)}{dx}\right)=\frac{2}{x^2}$$

Domain: **1 < *x* < 2**

Kondisi Batas:

$$U(1)=2$$

$$\left(-x\frac{dU(x)}{dx}\right)_{x=2}=\frac{1}{2}$$

III. Langkah 1 (Hal.99)

Persamaan pendekatan:

$$\hat{U}(x;a) = \varnothing_0(x) + a_1\varnothing_1(x) + a_2\varnothing_2(x) + \ldots + a_N\varnothing_N(x)$$

Persamaan Residual:

$$R(x;a) = \left[-\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\hat{U}(x)}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} \right] \neq 0$$

Persamaan N Galerkin Residual:

$$\int_\Omega R(x;a)\phi_1(x)dx = 0,\ \int_\Omega R(x;a)\phi_2(x)dx = 0,\ \ldots,\ \int_\Omega R(x;a)\phi_N(x)dx = 0$$

... substitusikan, diperoleh:

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\hat{U}}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} \right] \phi_i(x)\, dx = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

III. Langkah 2 (hal.99)

Integration by parts:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx} g + f \frac{dg}{dx}$$

Integrasikan:

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{d}{dx}(fg)\, dx = \int_{x_a}^{x_b} \frac{df}{dx} g\, dx + \int_{x_a}^{x_b} f \frac{dg}{dx}\, dx$$

$$\int_{x_a}^{x_b} d(fg) = \int_{x_a}^{x_b} \frac{df}{dx} g\, dx + \int_{x_a}^{x_b} f \frac{dg}{dx}\, dx$$

III. Langkah 2 (hal.100)

... dimanipulasi lebih lanjut ...

$$\int_{x_a}^{x_b} d(fg) = \int_{x_a}^{x_b} \frac{df}{dx} g\ dx + \int_{x_a}^{x_b} f\ \frac{dg}{dx}\ dx$$

$$\left[fg\right]_{x_a}^{x_b} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{df}{dx} g\ dx + \int_{x_a}^{x_b} f\ \frac{dg}{dx}\ dx$$

$$\int_{x_a}^{x_b} \frac{df}{dx} g\ dx = \left[fg\right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} f\ \frac{dg}{dx}\ dx$$

III. Langkah 2 (hal.100)

Aplikasikan terhadap:

$$\int_{x_a}^{x_b} \left[\frac{d}{dx}\left(x \frac{d\hat{U}}{dx} \right) - \frac{2}{x^2} \right] \phi_i(x)\, dx = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

$$\int_{x_a}^{x_b} \boxed{\frac{d}{dx}\left(x \frac{d\hat{U}}{dx} \right)} \phi_i(x)\, dx - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_i(x)\, dx = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

derivatif turun satu tingkat!

ingat: $\int_{x_a}^{x_b} \frac{df}{dx} g\, dx = \left[fg \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} f \frac{dg}{dx}\, dx$

...menjadi...

$$-\left[\left(-x \frac{d\hat{U}}{dx} \right) \phi_i \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \left(\boxed{x \frac{d\hat{U}}{dx}} \right) \frac{d\phi_i}{dx}\, dx - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_i(x)\, dx = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

...diatur dalam bentuk akhir:

$$\int_{x_a}^{x_b} x \frac{d\hat{U}}{dx}\frac{d\phi_i}{dx}\,dx = -\left[\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)\phi_i\right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2}\phi_i(x)\,dx \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

"loading term":
pada daerah batas

"loading term":
dalam domain

RHS mengandung seluruh "loading term" yaitu

- ***dalam domain dan***
- ***pada daerah batas***

III. Langkah 3 (hal.101)

Substitusikan "solusi coba" kedalamnya

$$\frac{d\hat{U}}{dx} = \frac{d\phi_0}{dx} + \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{d\phi_j}{dx}$$

$$\int_{x_a}^{x_b} x \frac{d\hat{U}}{dx} \frac{d\phi_i}{dx}\, dx = -\left[\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)\phi_i\right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2}\phi_i(x)\, dx \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

menjadi:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx}\, dx\right) a_j = -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2}\phi_i(x)\, dx - \left[\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)\phi_i\right]_{x_a}^{x_b}$$

$$- \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx}\, dx \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

Dalam bentuk matriks lengkap:

$$\begin{bmatrix} \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_1}{dx}\, dx & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_2}{dx}\, dx & \cdots & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_N}{dx}\, dx \\ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_1}{dx}\, dx & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_2}{dx}\, dx & \cdots & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_N}{dx}\, dx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_N}{dx} x \frac{d\phi_1}{dx}\, dx & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_N}{dx} x \frac{d\phi_2}{dx}\, dx & \cdots & \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_N}{dx} x \frac{d\phi_N}{dx}\, dx \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2}\phi_1\, dx - \left[\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)\phi_1\right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_1}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx}\, dx \\ -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2}\phi_2\, dx - \left[\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)\phi_2\right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_2}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx}\, dx \\ \vdots \\ -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2}\phi_N\, dx - \left[\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)\phi_N\right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_N}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx}\, dx \end{Bmatrix}$$

III. Langkah 3 (hal.102)

Dalam bentuk matriks kompak:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} \longleftrightarrow [K]\{a\} = \{F\}$$

"stiffness matrix"

"load vector"

dengan

$$K_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx} \, dx$$

simetris
$K_{ij} = K_{ji}$

$$F_i = -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \phi_i \, dx - \left[\left(-x \frac{d\hat{U}}{dx} \right) \phi_i \right]_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_0}{dx} \, dx$$

Suku kondisi batas muncul

derivatif tertinggi <u>turun</u> satu tingkat!

III. Langkah 4 (hal.104)

Dipilih "solusi coba" sbb:

$$\hat{U}(x;a) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_Nx^{N-1}$$

dipilih $N = 3$, sehingga menjadi

$$\hat{U}(x;a) = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

Jadi

$Ø_1(x) = 1$, $Ø_2(x) = x$, $Ø_3(x) = x^2$ dan

$$\frac{d\phi_1}{dx} = 0, \quad \frac{d\phi_2}{dx} = 1, \quad \frac{d\phi_3}{dx} = 2x$$

III. Langkah 5 (hal.106)

K_{ij} dihitung:

$$K_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx}\, dx$$

Untuk i = 1

- $K_{11} = 0$
- $K_{12} = 0$
- $K_{13} = 0$

karena:

$$\frac{d\phi_1}{dx} = 0$$

K_{ij} dihitung:

$$K_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx}\, dx$$

Untuk i = 2

$$K_{22} = \int_{x_a}^{x_b} 1 \bullet x \bullet 1\, dx = \frac{1}{2}\left(x_b{}^2 - x_a{}^2\right)$$

$$K_{23} = \int_{x_a}^{x_b} 1 \bullet x \bullet 2x\, dx = \frac{2}{3}\left(x_b{}^3 - x_a{}^3\right)$$

K_{ij} dihitung:

$$K_{ij} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d\phi_i}{dx} x \frac{d\phi_j}{dx}\, dx$$

Untuk i = 3

$$K_{33} = \int_{x_a}^{x_b} 2x \bullet x \bullet 2x\, dx = x_b^{\ 4} - x_a^{\ 4}$$

F_i dihitung:

$$F_i = -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2}\phi_i \, dx - \left[\left(-x \frac{d\hat{U}}{dx} \right) \phi_i \right]_{x_a}^{x_b}$$

F_i terdiri dari "interior loading" Fi_i dan "boundary term" FB_i:

$$FI_i = -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2}\phi_i \, dx \quad \text{dan} \quad FB_i = -\left[\left(-x \frac{d\hat{U}}{dx} \right) \phi_i \right]_{x_a}^{x_b}$$

FI_i dihitung:

$$FI_i = -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2}\phi_i \, dx$$

i = 1

$$FI_i = -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \bullet 1 \, dx = 2\left(\frac{1}{x_b} - \frac{1}{x_a}\right)$$

i = 2

$$FI_i = -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \bullet x \, dx = -2\left(\ln\frac{x_b}{x_a}\right)$$

i = 3

$$FI_i = -\int_{x_a}^{x_b} \frac{2}{x^2} \bullet x^2 \, dx = -2\left(x_b - x_a\right)$$

… III. Langkah 5 … (hal.107)

***FB$_i$* dihitung:**

$$FB_i = \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_a}\phi_i(x_a) - \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_b}\phi_i(x_b)$$

***i* = 1**

$$FB_i = \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_a} - \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_b}$$

***i* = 2**

$$FB_i = \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_a} x_a - \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_b} x_b$$

***i* = 3**

$$FB_i = \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_a} {x_a}^2 - \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_b} {x_b}^2$$

Debit ("flux") diformulasikan:

$$\hat{\tau} = -x\frac{d\hat{U}}{dx}$$

$$= -x\sum_{j=1}^{3} a_j \frac{d\phi_j}{dx}$$

$$= -a_2 x - 2a_3 x^2$$

Dalam bentuk akhir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(x_b{}^2 - x_a{}^2\right) & \frac{2}{3}\left(x_b{}^3 - x_a{}^3\right) \\ 0 & \frac{2}{3}\left(x_b{}^3 - x_a{}^3\right) & \left(x_b{}^4 - x_a{}^4\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\left(\frac{1}{x_b} - \frac{1}{x_a}\right) \\ -2\ln\frac{x_b}{x_a} \\ -2(x_b - x_a) \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_a} - \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_b} \\ \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_a} x_a - \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_b} x_b \\ \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_a} x_a{}^2 - \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x_b} x_b{}^2 \end{Bmatrix}$$

Masukkan setiap data lapangan

- Data geometrik $x_a = 1$, $x_b = 2$
- Sifat-sifat fisik dan “applied load”
  - “interior load”
  - kondisi batas

IV. Langkah 8 (hal.108)

- Masukkan data kedalam matrik, kecuali data kondisi batas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -2\ln 2 \\ -2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\dfrac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=1} - \left(-x\dfrac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=2} \\ \left(-x\dfrac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=1} - 2\left(-x\dfrac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=2} \\ \left(-x\dfrac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=1} - 4\left(-x\dfrac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=2} \end{Bmatrix}$$

- Sistem persamaan di atas siap untuk diselesaikan, kecuali nilai kondisi batas yang belum tuntas!

IV. Langkah 9 (hal.109)

- Masukkan data kondisi batas kedalam persamaan

$$U(1) = 2 \text{ dan } \left(-x \frac{dU(x)}{dx} \right)_{x=2} = \frac{1}{2}$$

belum dapat dihitung

- aplikasi “debit” kedalam sistem persamaan menjadikan:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -2\ln 2 \\ -2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x \frac{d\hat{U}}{dx} \right)_{x=1} - \frac{1}{2} \\ \left(-x \frac{d\hat{U}}{dx} \right)_{x=1} - 1 \\ \left(-x \frac{d\hat{U}}{dx} \right)_{x=1} - 2 \end{Bmatrix}$$

- Kondisi batas ***U*(1) = 2**
  - kondisi batas jenis ini lebih sulit diaplikasikan dibanding kondisi batas “debit.”
  - dalam sistem persamaan yang terakhir tidak terdapat suku yang dapat menampung nilai kondisi batas di atas.
  - sehingga digunakan alternatif terakhir yaitu aplikasi kondisi batas di atas langsung kepada “fungsi coba” itu sendiri; dan akan menghasilkan persamaan konstrain

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2$$

- Sistem persamaan yang terjadi

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

- dikunci dengan persamaan konstrain sbb:

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = d$$

1. nyatakan satu a_i terhadap a_i yang lain:

$$a_3 = \frac{d}{c_3} - \frac{c_1}{c_3} a_1 - \frac{c_2}{c_3} a_2$$

- Sistem persamaan menjadi

$$K_{11}a_1 + K_{12}a_2 + K_{13}\left(\frac{d}{c_3} - \frac{c_1}{c_3}a_1 - \frac{c_2}{c_3}a_2\right) = F_1$$

$$K_{21}a_1 + K_{22}a_2 + K_{23}\left(\frac{d}{c_3} - \frac{c_1}{c_3}a_1 - \frac{c_2}{c_3}a_2\right) = F_2$$

$$K_{31}a_1 + K_{32}a_2 + K_{33}\left(\frac{d}{c_3} - \frac{c_1}{c_3}a_1 - \frac{c_2}{c_3}a_2\right) = F_3$$

- disederhanakan menjadi:

$$\left(K_{11} - \frac{c_1}{c_3}K_{13}\right)a_1 + \left(K_{12} - \frac{c_2}{c_3}K_{13}\right)a_2 = F_1 - \frac{d}{c_3}K_{13}$$

$$\left(K_{21} - \frac{c_1}{c_3}K_{23}\right)a_1 + \left(K_{22} - \frac{c_2}{c_3}K_{23}\right)a_2 = F_2 - \frac{d}{c_3}K_{23}$$

$$\left(K_{31} - \frac{c_1}{c_3}K_{33}\right)a_1 + \left(K_{32} - \frac{c_2}{c_3}K_{33}\right)a_2 = F_3 - \frac{d}{c_3}K_{33}$$

... IV. Langkah 9... (hal.112)

- disederhanakan lagi menjadi:

operasi baris agar fungsi bobot sesuai "trial function"

$$\begin{bmatrix} \left(K_{11}-\frac{c_1}{c_3}K_{13}\right)-\frac{c_1}{c_3}\left(K_{31}-\frac{c_1}{c_3}K_{33}\right) & \left(K_{12}-\frac{c_2}{c_3}K_{13}\right)-\frac{c_1}{c_3}\left(K_{32}-\frac{c_2}{c_3}K_{32}\right) \\ \left(K_{21}-\frac{c_1}{c_3}K_{23}\right)-\frac{c_2}{c_3}\left(K_{31}-\frac{c_2}{c_3}K_{33}\right) & \left(K_{22}-\frac{c_2}{c_3}K_{23}\right)-\frac{c_2}{c_3}\left(K_{32}-\frac{c_2}{c_3}K_{33}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} \left(F_1-\frac{d}{c_3}K_{13}\right)-\frac{c_1}{c_3}\left(F_3-\frac{d}{c_3}K_{33}\right) \\ \left(F_2-\frac{d}{c_3}K_{23}\right)-\frac{c_2}{c_3}\left(F_3-\frac{d}{c_3}K_{33}\right) \end{Bmatrix}$$

operasi kolom agar kondisi batas terpenuhi

- Aplikasi kondisi batas ***U*(1) = 2**, membutuhkan dua jenis operasi matrik:
  1. Operasi kolom, ini berguna untuk mengubah “fungsi coba” agar memenuhi kondisi batas untuk setiap nilai a_i.
  2. Operasi baris, ini diperlukan agar fungsi bobot berubah sesuai dengan perubahan “fungsi coba” seperti yang dibutuhkan pada metoda Galerkin.

Teoretis

$\hat{U}(x;a) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^4$

a_i harus dicari

↓

Aplikasi kondisi batas

$\hat{U}(x;a) = \varnothing_0(x) + b_1\varnothing_1(x) + b_2\varnothing_2(x)$

↓

Kriteria Optimasi pada $R(x;a)$

untuk menentukan nilai a_i terbaik

↓

Penyelesaian $\hat{U}(x)$ diperoleh

Numeris

$\hat{U}(x;a) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^4$

a_i harus dicari

↓

Kriteria Optimasi pada $R(x;a)$

untuk menentukan nilai a_i terbaik

↓

Aplikasi kondisi batas

$\hat{U}(x;a) = \varnothing_0(x) + b_1\varnothing_1(x) + b_2\varnothing_2(x)$

↓

Penyelesaian $\hat{U}(x)$ diperoleh

membentuk "fungsi coba" sesuai kondisi batas

membentuk "fungsi coba" sesuai kondisi batas dengan operasi matrik: kolom kemudian baris

- Aplikasi kondisi batas $\boldsymbol{U}(1) = 2$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2$$

$$a_3 = 2 - a_1 - a_2$$

- Sistem persamaan awal:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{14}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -2\ln 2 \\ -2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \left(-x\dfrac{d\hat{U}}{dx} \right)_{x=1} - \dfrac{1}{2} \\ \left(-x\dfrac{d\hat{U}}{dx} \right)_{x=1} - 1 \\ \left(-x\dfrac{d\hat{U}}{dx} \right)_{x=1} - 2 \end{Bmatrix}$$

- ... dilakukan operasi kolom ...

IV. Operasi kolom (hal.113)

- ... operasi kolom dengan $c_1/c_3=1$, $c_2/c_3=1$, $d/c_3=2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{14}{3} & \frac{3}{2}-\frac{14}{3} \\ -15 & \frac{14}{3}-15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=1} - \frac{3}{2} \\ \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=1} - 2\ln 2 - 1 - \frac{14}{3}(2) \\ \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=1} - 4 - 15(2) \end{Bmatrix}$$

- ... disederhanakan ...

IV. Operasi baris (hal.113)

- ... disederhanakan ...

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{14}{3} & -\frac{19}{6} \\ -15 & -\frac{31}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=1} - \frac{3}{2} \\ \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=1} - 2\ln 2 - \frac{31}{3} \\ \left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=1} - 34 \end{Bmatrix}$$

- disederhanakan lebih jauh dengan operasi baris...

$$\begin{bmatrix} 15 & \frac{31}{3} \\ 15 - \frac{14}{3} & \frac{31}{3} - \frac{19}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 34 - \frac{3}{2} \\ 34 - 2\ln 2 - \frac{31}{3} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & \frac{31}{3} \\ \frac{31}{3} & \frac{43}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{65}{2} \\ \frac{71}{3} - 2\ln 2 \end{Bmatrix}$$

IV. Langkah 10 & 11 (hal.114)

10. Selesaikan pers. sehingga diperoleh nilai:

$a_1 = 3.719$, $a_2 = -2.254$ dan $a_3 = 0.535$

- Jadi penyelesaian pendekatannya adalah:

$$\hat{U}(x) = 3.719 - 2.254\,x + 0.535\,x^2$$

11. Hitung debit:

$$\tau(x) = -\,2.254\,x - 1.070\,x^2$$

IV. Langkah 12 (hal.115-118)

12. Plot penyelesaiannya dan prakirakan ketelitiannya, lihat Gambar 4.3 (hal 115)
    - **$\hat{U}(1) = 2$**
      tepat memenuhi kondisi batas $U(1) = 2$
    - **$\tau(2) = 0.228$**
      tidak memenuhi kondisi batas $\tau(2) = 0.5$

    Inilah karakteristik yang berbeda antara kedua kondisi batas tersebut, yang pertama dipenuhi secara tepat, yang kedua hanya didekati.

IV. Langkah 12 (hal.116-117)

Perbandingan solusi dengan DOF berbeda:

$$\hat{U}_1(x) = 2.591 - 0.591\, x$$

$$\hat{U}_2(x) = 3.719 - 2.254\, x + 0.535\, x^2$$

$$\hat{U}_3(x) = 4.963 - 4.908\, x + 2.340\, x^2 - 0.395\, x^3$$

$$\hat{U}_4(x) = 6.250 - 8.557\, x + 6.123\, x^2 - 2.097\, x^3 + 0.281\, x^4$$

Hitung debit:

$$\tau_1(x) = 0.591\, x$$

$$\tau_2(x) = 2.254\, x - 1.070\, x^2$$

$$\tau_3(x) = 4.908\, x - 4.680\, x^2 + 1.185\, x^3$$

$$\tau_4(x) = 8.557\, x - 12.246\, x^2 + 6.290\, x^3 – 1.123\, x^3$$

IV. Langkah 12 (hal.116-117)

Perbandingan solusi dengan DOF berbeda, $\boldsymbol{U}(1) = 2$:

$$\hat{U}_1(1) = 2$$

$$\hat{U}_2(1) = 2$$

$$\hat{U}_3(1) = 2$$

$$\hat{U}_4(1) = 2$$

dipenuhi secara tepat

Hitung debit, $\tau(2) = 0.5$:

$$\tau_1(2) = 1.182$$

$$\tau_2(2) = 0.228$$

$$\tau_3(2) = 0.576$$

$$\tau_4(2) = 0.480$$

semakin tinggi DOF semakin teliti

hanya didekati

V. Konsep Kondisi Batas (hal.118)

$$a_{2m}(x)\frac{d^{2m}U(x)}{dx}+a_{2m-1}(x)\frac{d^{2m-1}U(x)}{dx}+\ldots+a_1(x)\frac{dU(x)}{dx}+a_0(x)U(x)=f(x)$$

- Persamaan differensial di atas mempunyai derivatif tertinggi genap.
- Persamaan seperti ini sering dijumpai di bidang teknik.

Kondisi Batas:

1. Esensial. Kondisi batas untuk *U* dan derivatifnya s/d *m*-1
2. Natural. Kondisi batas untuk derivatif *U* dari *m* s/d 2*m*-1

V. Konsep Kondisi Batas (hal.119)

$$a_{2m}(x)\frac{d^{2m}U(x)}{dx}+a_{2m-1}(x)\frac{d^{2m-1}U(x)}{dx}+\ldots+a_1(x)\frac{dU(x)}{dx}+a_0(x)U(x)=f(x)$$

1. Kondisi Batas Esensial :

   constrained

   Kondisi batas ini sering disebut **Dirichlet, kinematik, displacement, geometrik**.

2. Kondisi Batas Natural :

   unconstrained

   Kondisi batas ini sering disebut **Neumann, dinamik, gaya, tegangan**.

... be a winner ...

... and acts like winners ..