Bab 3

Dasar Pertama:

Metoda Penyelesaian Pendekatan

Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.
mailto:Luknanto@ugm.ac.id

I. Tiga Langkah Pokok (hal.54)

1. Bentuk sebuah “penyelesaian pendekatan” $\hat{U}$
2. Optimasikan $\hat{U}$
3. Prakirakan ketelitian $\hat{U}$

1. Pembentukan $\hat{U}$ (hal.54)

$$\hat{U}(x;a) = \varnothing_0(x) + a_1\varnothing_1(x) + a_2\varnothing_2(x) + \ldots + a_N\varnothing_N(x)$$

- $\varnothing_0(x)$, $\varnothing_1(x)$, …, $\varnothing_N(x)$ disebut *fungsi trial*, *fungsi basis*
- a_1, a_2, … , a_N adalah parameter yang dicari; sering disebut sebagai "derajad bebas" (DOF)
- $\hat{U}(x;a)$ merupakan fungsi dari x dan a_1, a_2, … , a_N
- $\varnothing_0(x)$ tidak dikalikan dengan parameter a; fungsinya untuk memenuhi syarat kondisi batas.

2. Kriteria Optimasi Untuk Û

(hal.55)

Ada dua kriteria yang terkenal dalam MEH

A. Metoda Residu Berbobot (MWR) diaplikasikan pada persamaan dasar yang berbentuk persamaan differensial

B. Metoda Variasi Ritz (RVM) diaplikasikan pada persamaan dasar yang berbentuk persamaan integral.

A. Metoda Residu Berbobot (MWR)

(hal.55)

- me-***minimum***-kan "selisih" (error) pada ***persamaan dasar*** [***bukan*** pada fungsi $\hat{U}(x)$ yang kita cari]
- ada 4 metoda
  - metoda kolokasi
  - metoda subdomain
  - metoda kuadrat terkecil
  - metoda Galerkin

B. Metoda Variasi Ritz (RVM)

(hal.55)

- me-***minimum***-kan suatu kuantitas fisik misalkan ***energi*** [***bukan*** pada fungsi $\hat{U}(x)$ yang kita cari]
- misalkan dalam mekanika statis, biasanya yang diminimumkan adalah energi potensial.

3. Prakirakan Ketelitian Û (hal.56)

- diinginkan suatu prakiraan seberapa dekat ketelitian Û dengan ***U***
- ketelitian ini disebut dengan "error"/ kesalahan $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) - \hat{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x})$
- secara praktis kita tidak pernah dapat menghitung $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$, karena didalamnya mengandung penyelesaian "exact" $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$.
- oleh karena itu harus ada cara lain untuk memprakirakan $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$.

Derajad Bebas (DOF) (hal.56)

- jika kita dapat memprakirakan kesalahan $\boldsymbol{E(x) = U(x) - \hat{U}(x)}$ … dan ternyata terlalu besar
- apakah ada cara untuk memperkecil?
- … ya … salah satu cara …
- yaitu dengan membuat $\hat{U}(x)$ yang baru yang mempunyai derajad bebas lebih tinggi.

Teknik Memperoleh $\hat{U}(x)$ (hal.56)

$\hat{U}(x;a)$

a_i harus dicari

Kriteria Optimasi

untuk menentukan nilai a_i terbaik

Penyelesaian $\hat{U}(x)$ diperoleh

Telitikah $\hat{U}(x)$ terhadap $U(x)$?

- **sudahkah ketelitiannya diterima**
- **jika belum; tambah DOF misalnya**

$\hat{U}(x)$ dgn Kriteria Berbeda (hal.56)

$\hat{U}(x;a)$

Kriteria Kolokasi

$\hat{U}(x)$ diperoleh

$\hat{U}(x;a)$

Kriteria Subdomain

$\hat{U}(x)$ diperoleh

$\hat{U}(x;a)$

Kriteria Kuadrat Terkecil

$\hat{U}(x)$ diperoleh

$\hat{U}(x;a)$

Kriteria Galerkin

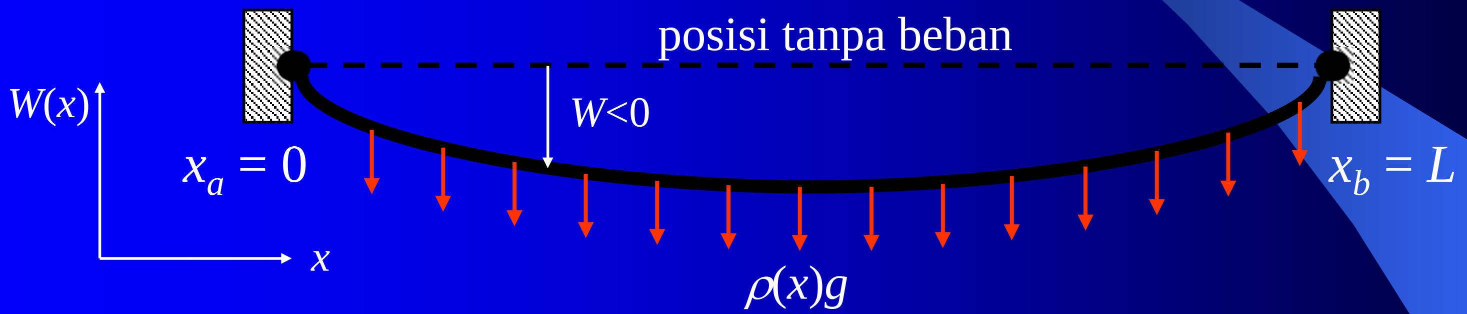
$\hat{U}(x)$ diperoleh

II. Contoh Kasus (hal.41)

Deskripsi:

Sebuah kabel yang tergantung pada dua perletakan dan mendapat beban merata karena berat sendiri.

Gambar:



Persamaan dasar:

$$-\frac{d}{dx}\left(T\frac{dW(x)}{dx}\right) = -\rho(x)g \qquad 0 < x < L$$

$$W(0) = 0, \quad W(L) = 0$$

Contoh Kasus (lanjutan) (hal.59)

Persamaan Dasar:

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{dU}{dx}\right)=\frac{2}{x^2}$$

Domain: $\mathbf{1 < x < 2}$

Kondisi Batas:

$$U(1)=2$$

$$\left(-x\frac{dU}{dx}\right)_{x=2}=\frac{1}{2}$$

Contoh Kasus (lanjutan) (hal.59)

Kondisi Batas:

- dalam bentuk seperti di bawah ini, kondisi batas mempunyai arti khusus di lapangan, misalkan debit sesuai cairan.

$$\tau(x) = -x\frac{dU(x)}{dx}$$

- oleh karena itu kondisi batas ditulis sebagai:

$$\left(-x\frac{dU(x)}{dx}\right)_{x=2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tau(2) = \frac{1}{2}$$

- bukan:

$$\left(\frac{dU(x)}{dx}\right)_{x=2} = -\frac{1}{4}$$

III. Pembentukan $\hat{U}$ (hal.60)

- $\hat{U}(x;a) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_N x^{N\text{-}1}$
- "persamaan pendekatan" di atas harus memenuhi:
  1. Persamaan dasar (baik yang differensial maupun variasional) pada "interior" dari domainnya
  2. Nilai-nilai kondisi batas yang telah ditentukan pada daerah batas.
- untuk memenuhi Butir 2, diperlukan dua metoda yang berbeda; hal ini disebut dengan "applying the boundary conditions."

Aplikasi Kondisi Batas (hal.60)

1. **Cara Teoritis**. Kondisi Batas (baik semua atau sebagian) diaplikasikan langsung ke $\hat{U}$ pada awal analisis dengan membentuknya ke suatu fungsi yang memenuhi kondisi batas tersebut.
2. **Cara Numeris**. Kondisi Batas diaplikasikan ke $\hat{U}$ yang sudah dioptimasikan pada akhir analisis.

Kedua cara ini menghasilkan $\hat{U}$ yang sama.

Cara Teoritis … (hal.61)

Dibentuk "solusi coba" dalam bentuk $\hat{U}(x;a)$ dan dipaksa memenuhi kondisi batas untuk setiap nilai a_i.

- $\hat{U}(x;a) = \varnothing_0(x) + a_1\varnothing_1(x) + a_2\varnothing_2(x) + \ldots + a_N\varnothing_N(x)$
- harus memenuhi kondisi batas
  $U(1) = 2$

… Cara Teoritis $\hat{U}$ … (hal.61)

- $\hat{U}(1;a) = \text{Ø}_0(1) + a_1\text{Ø}_1(1) + a_2\text{Ø}_2(1) + \ldots + a_N\text{Ø}_N(1) = 2$
- Agar untuk setiap a_i ini terpenuhi maka:
  1. $\text{Ø}_0(1) = 2$
  2. $\text{Ø}_i(1) = 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, N$

… Cara Teoritis $d\hat{U}/dx$ … (hal.62)

- Harus dipenuhi:

$$\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=2}=\left(-x\frac{d\phi_0}{dx}\right)_{x=2}+a_1\left(-x\frac{d\phi_1}{dx}\right)_{x=2}+a_2\left(-x\frac{d\phi_2}{dx}\right)_{x=2}+\ldots+a_N\left(-x\frac{d\phi_N}{dx}\right)_{x=2}=\frac{1}{2}$$

- Agar untuk setiap a_i ini terpenuhi maka:

$$\left(-x\frac{d\phi_0}{dx}\right)_{x=2}=\frac{1}{2}$$

$$\left(-x\frac{d\phi_i}{dx}\right)_{x=2}=0 \quad \text{untuk } i=1,2,\ldots,N$$

… Mengunci… (hal.62)

- Tampak bahwa dapat dibentuk suatu "solusi coba" yang selalu memenuhi kondisi batas untuk setiap a_i.
- Artinya apapun juga cara yang digunakan untuk optimasi a_i, kondisi batas akan selalu terpenuhi.
- Sifat seperti ini disebut "mengunci" atau "constraining" "solusi coba."

Langkah 1 … (hal.62)

- Kita lakukan pada "solusi coba" dgn N=4
  $\hat{U}(x;a) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$
- Kondisi batas:
  $\hat{U}(1;a) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2$

$$\left(-x\frac{d\hat{U}}{dx}\right)_{x=2} = -a_2 x - 2a_3 x^2 - 3a_4 x^3 = \frac{1}{2}$$

$$- 2a_2 - 8a_3 - 24a_4 = 1/2$$

... Langkah 2 ... (hal.63)

1. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2$
2. $a_2 + 4a_3 + 12a_4 = -\frac{1}{4}$

- **kedua persamaan ini disebut "persamaan konstrain"**
- **Pers. 1 dapat ditulis sebagai:**

  $a_1 = 2 - a_2 - a_3 - a_4$
- **Pers. 2 dapat ditulis sebagai:**

  $a_2 = -\frac{1}{4} - 4a_3 - 12a_4$

... Langkah 3 ... (hal.63)

- **Pers 1. disubstitusikan, sehingga**

$$\hat{U}(x;a) = (2 - a_2 - a_3 - a_4) + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3$$

$$\hat{U}(x;a) = 2 + a_2(x\text{-}1) + a_3(x^2\text{-}1) + a_4(x^3\text{-}1)$$

- **Pers 2. disubstitusikan, sehingga**

$$\hat{U}(x;a) = 2 + (-\tfrac{1}{4} - 4a_3 - 12a_4)(x\text{-}1) + a_3(x^2\text{-}1) + a_4(x^3\text{-}1)$$

$$\hat{U}(x;a) = 2 - \tfrac{1}{4}(x\text{-}1) + a_3(x\text{-}1)(x\text{-}3) + a_4(x\text{-}1)(x^2 + x\text{-}11)$$

… $\hat{U}(x;a)$ ketemu … (hal.63)

- $\hat{U}(x;a) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + a_3(x-1)(x-3) + a_4(x-1)(x^2 + x - 11)$

  disederhanakan menjadi:

- $\hat{U}(x;a) = \varnothing_0(x) + a_1\varnothing_1(x) + a_2\varnothing_2(x)$

  dengan

  $\varnothing_0(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1)$

  $\varnothing_1(x) = (x-1)(x-3)$

  $\varnothing_2(x) = (x-1)(x^2 + x - 11)$

- a_3 dan a_4 diubah menjadi a_1 dan a_2

... menghitung $d\hat{U}/dx$ ... (hal.63)

- Untuk "debit":

$$\hat{\tau}(x;a) = -x\frac{d\hat{U}(x;a)}{dx}$$
$$= \left(-x\frac{d\phi_0}{dx}\right) + a_1\left(-x\frac{d\phi_1}{dx}\right) + a_2\left(-x\frac{d\phi_2}{dx}\right)$$

- dengan

$$-x\frac{d\phi_0(x)}{dx} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2)$$
$$-x\frac{d\phi_1(x)}{dx} = -2x(x-2)$$
$$-x\frac{d\phi_2(x)}{dx} = -3x(x-2)(x+2)$$

IV. Empat MWR untuk $\hat{U}$ (hal.65)

1. Persamaan Dasar

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{dU(x)}{dx}\right)-\frac{2}{x^2}=0$$

2. Persamaan Pendekatan

$$-\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\hat{U}(x)}{dx}\right)-\frac{2}{x^2}\neq 0$$

Definisi Residual ... (hal.65)

- R = LHS Pers. Pendekatan – LHS Pers. dasar

$$R = \underbrace{\left[-\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\hat{U}(x)}{dx}\right)-\frac{2}{x^2}\right]}_{\neq 0} - \underbrace{\left[-\frac{d}{dx}\left(x\frac{dU(x)}{dx}\right)-\frac{2}{x^2}\right]}_{=0}$$

- diperoleh residual, R adalah:

$$R(x;a) = \left[-\frac{d}{dx}\left(x\frac{d\hat{U}(x)}{dx}\right)-\frac{2}{x^2}\right] \neq 0$$

- substitusi diperoleh:

$$\boldsymbol{R(x;a) = -\tfrac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3\,(3x^2-4)a_2 - 2/x^2}$$

... *konsep pokok MWR* ... (hal.65)

- Residual:

  $\boldsymbol{R(x;a) = -\tfrac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3\,(3x^2-4)a_2 - 2/x^2}$

- **Konsep pokok**: mencari nilai a_1 dan a_2 yang menghasilkan nilai $R(x;a)$ paling kecil.
- Secara intuisi jika $R(x;a)$ mengecil, maka $E(x) = U(x) - \hat{U}(x)$ juga mengecil.

1. Metoda Kolokasi (hal.66)

- Untuk setiap parameter a_i yang dibutuhkan, pilih satu titik x_i dalam domain. Pada setiap titik tersebut "paksa" residu $R(x_i;a) = 0$

$$R(x_1;a) = 0,\ R(x_2;a) = 0,\ \ldots,\ R(x_N;a) = 0$$

- Untuk N nilai a_i, akan diperoleh N sistem persamaan.
- Titik-titik x_i tersebut adalah titik kolokasi.

... Metoda Kolokasi 1... (hal.66)

- Pilih titik-titik x_i misalkan $x_1 = 4/3$, $x_2 = 5/3$
- substitusikan kedalam residual
  $R(x;a) = -\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3\,(3x^2-4)a_2 - 2/x^2 = 0$
- diperoleh sistem persamaan
  $4/3\ a_1 + 04\ a_2 = 11/8$
  $8/3\ a_1 + 13\ a_2 = 97/100$
- diperoleh nilai:
  $a_1 = 2.0993$ dan $a_2 = -0.3560$

... Metoda Kolokasi 2... (hal.66)

- **dengan nilai:**

  $a_1 = 2.0993$ **dan** $a_2 = -0.3560$

- **maka diperoleh "solusi coba":**

  $\hat{U}_K(x) = 2 - ¼\,(x\text{-}1) + 2.0993\,(x\text{-}1)(x\text{-}3) - 0.3560\,(x\text{-}1)(x^2 + x\text{-}11)$

- **dan debit/"flux"-nya:**

  $\tau_K(x) = 2 + ¼\,(x\text{-}2) - 4.1986\,x(x\text{-}2) + 1.0680\,(x\text{-}2)\,(x\text{+}2)$

- **lihat hal. 67 (perhatikan pada saat R=0, E≠0)**

2. Metoda Subdomain (hal.67)

- Untuk setiap parameter a_i yang dibutuhkan, pilih satu interval Δx_i dalam domain. Pada setiap interval tersebut "paksa" residu rerata = 0,

$$\frac{1}{\Delta x_1}\int_{\Delta x_1} R(x;a)dx = 0, \frac{1}{\Delta x_2}\int_{\Delta x_2} R(x;a)dx = 0, \ldots, \frac{1}{\Delta x_N}\int_{\Delta x_N} R(x;a)dx = 0$$

- Untuk N nilai a_i, akan diperoleh N sistem persamaan.
- Interval-interval Δx_i tersebut dinamai subdomain.

… Metoda Subdomain 1… (hal.68)

- Bagi subdomain menjadi: $\Delta x_1 = 1 < x < 1.5$ dan $\Delta x_1 = 1.5 < x < 2$, sehingga diperoleh dua persamaan.

$$\int_{1}^{1.5}\left(-\frac{1}{4}+4(x-1)a_1+3(3x^2-4)a_2-\frac{2}{x^2}\right)dx=0$$

$$\int_{1.5}^{2}\left(-\frac{1}{4}+4(x-1)a_1+3(3x^2-4)a_2-\frac{2}{x^2}\right)dx=0$$

... Metoda Subdomain 2... (hal.68)

- diperoleh sistem persamaan
  $1/2\ a_1 + 09/8\ a_2 = 19/24$
  $3/2\ a_1 + 63/8\ a_2 = 11/24$
- diperoleh nilai:
  $a_1 = 2.5417$ dan $a_2 = -0.4259$

... Metoda Subdomain 2... (hal.68)

- **dengan nilai:**

  $a_1 = 2.5417$ dan $a_2 = -0.4259$

- **maka diperoleh "solusi coba":**

  $\hat{U}_S(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 2.5417\,(x-1)(x-3) - 0.4259(x-1)(x^2 + x - 11)$

- **dan debit/"flux"-nya:**

  $\tau_S(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2) - 5.0834\,x(x-2) + 1.2777\,(x-2)(x+2)$

- **grafik hasil lihat hal. 69.**

3. Metoda Kuadrat terkecil (hal.68)

- Minimumkan integral kuadrat residual dalam domain terhadap setiap parameter a_i, atau secara matematis ditulis sbb:
  Minimumkan
  $$\int_{\Omega} R^2(x;a)\,dx$$
- Agar nilai integral tersebut minimum diperlukan syarat yaitu derivasi integral tersebut untuk setiap a_i mempunyai nilai nol.

… Kuadrat terkecil 1… (hal.69)

- formulasinya:

$$\frac{\partial}{\partial a_1}\int_\Omega R^2(x;a)dx = 0, \frac{\partial}{\partial a_2}\int_\Omega R^2(x;a)dx = 0, \ldots, \frac{\partial}{\partial a_N}\int_\Omega R^2(x;a)dx = 0$$

- disederhanakan menjadi:

$$\int_\Omega R(x;a)\frac{\partial R(x;a)}{\partial a_1}dx = 0, \int_\Omega R(x;a)\frac{\partial R(x;a)}{\partial a_2}dx = 0, \ldots,$$

$$\int_\Omega R(x;a)\frac{\partial R(x;a)}{\partial a_N}dx = 0$$

konstan 2 dieliminasi dari setiap integral di atas.

… Kuadrat terkecil 2… (hal.70)

- … selanjutnya …

$$\frac{\partial R(x;a)}{\partial a_1} = 4(x-1) \text{ dan } \frac{\partial R(x;a)}{\partial a_2} = 3(3x^2-4)$$

- substitusi kedalam residual menghasilkan

$$\int_1^2 \left(-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) 4(x-1)\, dx = 0$$

$$\int_1^2 \left(-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right) 3(3x^2-4)\, dx = 0$$

… Kuadrat terkecil 3… (hal.71)

- jika integrasi dilakukan diperoleh sistem persamaan
  $16/3\ a_1 + 027\ a_2 = 8 \ln 2 - 7/2$
  $27\ a_1 + 711/5\ a_2 = 33/4$
- diperoleh nilai:
  $a_1 = 2.3155$ dan $a_2 = -0.3816$

... Kuadrat terkecil 4... (hal.71)

- **dengan nilai:**

  $a_1 = 2.3155$ dan $a_2 = -0.3816$

- **maka diperoleh "solusi coba":**

  $\hat{U}_L(x) = 2 - \frac{1}{4}(x-1) + 2.3155\,(x-1)(x-3) - 0.3816(x-1)(x^2 + x - 11)$

- **dan debit/"flux"-nya:**

  $\tau_L(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-2) - 4.6310\,x(x-2) + 1.1448\,(x-2)(x+2)$

- **grafik hasil lihat hal. 70 .**

4. Metoda Galerkin (hal.71)

- Untuk setiap parameter a_i yang dibutuhkan, diharuskan rerata berbobot untuk residual = 0
- Fungsi yang digunakan sebagai pembobot adalah $\varnothing_i(x)$ yang terkait dengan Δx_i dalam domain.
- Untuk N nilai a_i, akan diperoleh N sistem persamaan
- $$\int_\Omega R(x;a)\phi_1(x)dx = 0, \int_\Omega R(x;a)\phi_2(x)dx = 0, \ldots,$$ $$\int_\Omega R(x;a)\phi_N(x)dx = 0$$

... Galerkin 1... (hal.71)

- substitusi residual dan fungsi bobot menghasilkan

$$\int_1^2 \left(-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right)(x-1)(x-3)\, dx = 0$$

$$\int_1^2 \left(-\frac{1}{4} + 4(x-1)a_1 + 3(3x^2-4)a_2 - \frac{2}{x^2} \right)(x-1)(x^2+x-11)\, dx = 0$$

- jika integrasi dilakukan diperoleh sistem persamaan
  -05/3 a_1 - 41/5 a_2 = 29/6 – 8 ln 2
  -41/5 a_1 - 81/2 a_2 = 211/16 – 24 ln 2

... Galerkin 2... (hal.72)

- **dengan nilai:**

  $a_1 = 2.3178$ dan $a_2 = -0.3477$

- **maka diperoleh "solusi coba":**

  $$\hat{U}_G(x) = 2 - \tfrac{1}{4}(x-1) + 2.3178\,(x-1)(x-3) - 0.3477(x-1)(x^2 + x - 11)$$

- **dan debit/"flux"-nya:**

  $$\tau_G(x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}(x-2) - 4.2756\,x(x-2) + 1.0431\,(x-2)(x+2)$$

- **grafik hasil lihat hal. 73.**

Resume Residual Berbobot (hal.72)

- Secara umum metoda residual berbobot dapat diformulasikan seperti di bawah. Sedangkan fungsi bobot yang digunakan tiap-tiap metoda berbeda (lihat hal.72-75).

$$\int_{\Omega} R(x;a)W_1(x)dx = 0, \int_{\Omega} R(x;a)W_2(x)dx = 0, ...,$$

$$\int_{\Omega} R(x;a)W_N(x)dx = 0$$

V. Metoda Variasi Ritz untuk $\hat{U}$ (hal.75)

- Metoda ini tidak dibahas di sini karena membutuhkan mata kuliah “Kalkulus Variasi”
- Hasil metoda ini sama dengan Metoda Galerkin.
- Bahkan beberapa ahli memberi nama kombinasi yaitu Metoda Ritz-Galerkin.
- Silakan lihat hal.(75-78)

VI. Estimasi Ketelitian untuk $\hat{U}$ (hal.78)

- Semakin tinggi DOF yang digunakan, maka ketelitian “penyelesaian pendekatan”-nya makin tinggi
- Bahasan rinci silakan lihat hal.78-86)

Resume Memperoleh $\hat{U}(x)$

$\hat{U}(x;a)$

a_i harus dicari

$\hat{U}(x;a)$

dikunci/“constrained” dengan kondisi batas

Kriteria Optimasi pada $R(x;a)$

untuk menentukan nilai a_i terbaik

Penyelesaian $\hat{U}(x)$ diperoleh

Telitikah $\hat{U}(x)$ terhadap $U(x)$?

- sudahkah ketelitiannya diterima
- jika belum; tambah DOF (a_i) misalnya

... Resume Memperoleh $\hat{U}(x)$

- Analisis yang dibutuhkan:

$\hat{U}(x;a)$

a_i harus dicari

$\hat{U}(x;a)$

dikunci/"constrained" dengan kondisi batas

Sistem Persamaan Linier

Kriteria Optimasi pada $R(x;a)$

untuk menentukan nilai a_i terbaik

Analisis Integrasi

Sistem Persamaan Linier

Penyelesaian $\hat{U}(x)$ diperoleh

... be a winner ...

… and acts like winners ..